

Heinrich Nuskowski  
Digitale Signalübertragung



Informationstechnik

**Heinrich Nuskowski**

**Digitale Signalübertragung**

Grundlagen der  
digitalen Nachrichtenübertragungssysteme

4. Auflage

 VOGT

Dresden 2015

*Autor*

Dr.-Ing. habil. Heinrich Nuskowski  
TU Dresden  
Lehrstuhl Mobile Nachrichtensysteme

*Herausgeber*

Prof. Dr.-Ing. Jörg Vogt  
HTW Dresden  
Fakultät Informatik / Mathematik  
01069 Dresden

Bibliografische Information der Deutschen Bibliothek

Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.ddb.de> abrufbar.

1. Auflage März 2008
2. neubearb. und erw. Auflage Februar 2009
3. neubearb. und erw. Auflage Januar 2013
4. neubearb. und erw. Auflage September 2015

© Jörg Vogt Verlag 2015  
Alle Rechte vorbehalten. All rights reserved.

Gesetzt vom Autor

ISBN 978-3-938860-88-5

Jörg Vogt Verlag  
Niederwaldstr. 36  
01277 Dresden  
Germany

Phone: +49-(0)351-31403921  
Telefax: +49-(0)351-31403918  
e-mail: [info@vogtverlag.de](mailto:info@vogtverlag.de)  
Internet : [www.vogtverlag.de](http://www.vogtverlag.de)

# Vorwort des Herausgebers

Die in der Reihe „Informationstechnik“ erscheinenden Lehrbücher haben die Zielsetzung, Grundlagen, aktuelle Themen und Anwendungsgebiete ausgewählter Bereiche schwerpunktmäßig zu behandeln. Dabei sollen sowohl Studenten, als auch im Beruf stehende Fachleute angesprochen werden.

Bereits erschienen sind die Lehrbücher „Digitale Signalübertragung im Mobilfunk“ und „Hochfrequenztechnik I“. In Planung befinden sich die Themen Betriebssysteme, Rechnernetze und weiterführende Werke zur Hochfrequenztechnik. Wir streben an, mit einer teilweisen Überlappung der Stoffgebiete das ganzheitliche Verständnis für die komplexe Problematik zu erhöhen.

Die positive Resonanz auf die bisherigen Auflagen des vorliegenden Lehrbuchs bestärkt Autor und Verlag darin, den eingeschlagenen Weg weiterzugehen.

Dresden, im August 2015

Jörg Vogt

# Vorwort zur 4. Auflage

Der Umfang des Buches wurde gegenüber der 3. Auflage um 27 Seiten erweitert. Es wurden zahlreiche neue Bilder, Diagramme, mathematische Ableitungen und Textpassagen hinzugefügt, um den behandelten Stoff noch anschaulicher und verständlicher zu machen. Diese Ergänzungen betreffen u.a. die Berechnung der Leistungsdichtespektren modulierter Signale, die Einstellung eines Signal-Rauschverhältnisses bei Computer-Simulationen, die Differenz-Codierung bei Duobinär- und MSK-Übertragung, den Zusammenhang zwischen MSK und OQPSK mit Sinushalbwellen-Impulsen, sowie verschiedene Demodulationsvarianten für MSK. Auch für die neue Auflage gilt: Kommentare, Hinweise und Anregungen aus dem verehrten Leserkreis sind herzlich willkommen.

Dresden, im Juli 2015

Heinrich Nuskowski

# Vorwort zur 3. Auflage

Die Gliederung und der Inhalt des Buches wurden gegenüber der 2. Auflage im Wesentlichen beibehalten. Jedoch wurden zahlreiche Ergänzungen und didaktische Veränderungen vorgenommen, so dass sich der Umfang des Buches um etwa 30 Seiten gegenüber der 2. Auflage vergrößert hat. Die Änderungen wurden in der Hoffnung gemacht, den Stoff noch übersichtlicher, anschaulicher und verständlicher zu präsentieren. So wurden mathematische Ableitungen in einem separaten mathematischen Anhang untergebracht. Auch wurden verschiedene Fehler korrigiert. Für Kommentare und kritische Hinweise aus dem verehrten Leserkreis bin ich weiterhin sehr dankbar.

Herzlich danken möchte ich an dieser Stelle Herrn Dr. Rainer Schaffer für viele anregende Diskussionen und für die wertvolle Hilfe bei der Erstellung des  $\text{\LaTeX}$ -Manuskriptes.

Dresden, im September 2012

Heinrich Nuskowski

# Vorwort zur 2. Auflage

Der Inhalt ist gegenüber der Erstauflage unverändert geblieben. Jedoch wurde die mit der Neuauflage gebotene Chance genutzt, einige Kapitel zu überarbeiten, verschiedene Sachverhalte zu präzisieren und zu ergänzen, sowie Fehler zu korrigieren, die leider in der ersten Auflage unentdeckt geblieben waren. Auch für die neue Auflage gilt, kritische Hinweise zur weiteren Verbesserung sind herzlich willkommen.

Dresden, im Januar 2009

Heinrich Nuskowski

# Vorwort zur 1. Auflage

Das vorliegende Buch basiert auf dem Script zur Vorlesung "Digitale Signalübertragung", die der Autor an der Technischen Universität Dresden hält. Es wendet sich daher in erster Linie an Studenten, die sich in ihrem Fachstudium mit den Problemen der digitalen Signalübertragung beschäftigen und vermittelt theoretische Grundlagen dieser Disziplin der Nachrichtentechnik. Es ist auch gedacht als eine Grundlage für vertiefende Vorlesungen auf dem Gebiet der Übertragungstechnik im Fachstudium. Das Buch wendet sich aber auch an den auf diesem Gebiet tätigen Naturwissenschaftler oder Ingenieur. Der mit dem Buch vermittelte Überblick über das Stoffgebiet und die anschaulich beschriebenen Zusammenhänge bilden ein nützliches Repetitorium und eine Hilfe bei der Entscheidung praxisrelevanter Fragen. Für das Studium des Buches werden Kenntnisse der Systemtheorie vorausgesetzt, so wie sie im Grundstudium des Ingenieur-Studienganges Elektrotechnik vermittelt werden.

Digitale Signalübertragung kann unmoduliert im Basisband erfolgen oder moduliert im Bandpassbereich. Diese beiden Übertragungsvarianten geben die Gliederung des Buches vor. Nach einleitenden Betrachtungen im ersten Kapitel, behandelt das zweite Kapitel die digitale Signalübertragung im Basisband. Die intersymbolinterferenzfreie Übertragung von bandbegrenzten Impulsen, der optimale Signalempfang unter AWGN-Bedingungen und die Berechnung des Leistungsdichtespektrums zufälliger Impulsfolgen sind die Schwerpunkte dieses Kapitels. Das dritte Kapitel ist der modulierten Signalübertragung gewidmet. Es werden Ein- und Mehrträgerverfahren mit ihren Eigenschaften betrachtet: spektrale Effizienz und Störfestigkeit. Die Beschreibung der modulierten Signale erfolgt einerseits mit Hilfe der komplexen Einhüllenden. Diese Beschreibung ermöglicht ein Bandpassübertragungssystem in ein äquivalentes Basisbandübertragungssystem zu überführen. Dies bedeutet eine Vereinfachung der theoretischen Analyse und

der mathematischen Simulation. Von großer praktischer Bedeutung ist die sich damit ergebende Möglichkeit, Modulation und Demodulation mit Hilfe digitaler Signalverarbeitung im Basisband auszuführen. Andererseits werden die modulierten Signale als Vektoren in einem Signalraum beschrieben, der durch orthogonale Basisfunktionen definiert ist. Diese Beschreibung abstrahiert von der konkreten Signalform und ermöglicht die Anwendung der Vektoralgebra, als leistungsfähiges mathematisches Werkzeug, auf die Analyse von Übertragungsproblemen.

Wichtige Ressourcen für eine Signalübertragung sind Frequenzbandbreite und Sendeleistung. Beide Ressourcen stehen immer nur begrenzt zur Verfügung. Dem sorgsamem Umgang mit diesen beiden Ressourcen muss daher in jedem Übertragungssystem große Aufmerksamkeit gewidmet werden. Dieser Problemkreis steht daher auch im Mittelpunkt dieses Buches:

- Intersymbolinterferenzfreie Übertragung bandbegrenzter Signale unter Beachtung der Nyquistkriterien der Signalübertragung.
- Erhöhung der spektralen Effizienz durch Übertragung mehrvalenter Symbole, sowie durch Leitungscodierung und Impulsformung.
- Anwendung optimaler Empfangsmethoden (ML- und MAP-Empfänger) unter AWGN-Bedingungen (Störung durch additives gaußsches weißes Rauschen).

An dieser Stelle möchte ich mich besonders bei Prof. Dr.-Ing. Gerhard Fettweis für die Unterstützung und Förderung der Arbeit und für die hervorragenden Arbeitsbedingungen an dem Vodafone Stiftungslehrstuhl "Mobile Nachrichtensysteme" bedanken.

Mein Dank gilt auch Herrn Prof. Dr.-Ing. Jörg Vogt für den Anstoß zu diesem Buch, für viele fachliche Diskussionen und die überaus wertvolle Unterstützung bei der Erstellung des Manuskripts. Auch allen meinen Kollegen am Lehrstuhl danke ich für die kreative und nette Arbeitsatmosphäre. Für die kritische Durchsicht des Manuskripts, verbunden mit vielen Hinweisen und Anregungen, sage ich Herrn Dipl.-Ing. Marco Krondorf ein herzliches Danke.

In dem Bewußtsein, dass jede Arbeit verbessert werden kann, freue ich mich auf Reaktionen der Leserschaft. Hinweise und Vorschläge sind sehr willkommen.

Dresden, im Februar 2008

Heinrich Nuskowski

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>3</b>
1.1	Historische Entwicklung der Datenübertragung . . . . .	3
1.2	Basisband- und Bandpassübertragung . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Übertragung im Basisband</b>	<b>9</b>
2.1	ISI-freie Impulsübertragung . . . . .	9
2.1.1	Übertragungsmodell . . . . .	9
2.1.2	1. Nyquistkriterium der Datenübertragung . . . . .	11
2.1.3	2. Nyquistkriterium der Datenübertragung . . . . .	18
2.1.4	Spektrale Effizienz der Impulsübertragung im Basisband . . . . .	23
2.2	Partial Response Impulse . . . . .	24
2.3	Signalempfang unter AWGN-Bedingungen . . . . .	27
2.3.1	Optimales Empfangsfilter . . . . .	27
2.3.2	Optimale Sendeimpulse . . . . .	30
2.3.3	Korrelator als optimales Empfangsfilter . . . . .	35
2.3.4	Maximum-Likelihood Detektor . . . . .	37
2.3.5	Maximum-Likelihood Sequenz-Detektor . . . . .	44
2.4	Leistungsspektrum zufälliger Impulsfolgen . . . . .	49
2.4.1	Berechnung des Leistungsspektrums . . . . .	49
2.4.2	Leistungsspektren ausgewählter Impulsfolgen . . . . .	54
2.4.3	Codes und Impulsformen für die Basisbandübertragung . . . . .	67
<b>3</b>	<b>Übertragung im Bandpassbereich</b>	<b>73</b>
3.1	Darstellung von Bandpasssignalen . . . . .	73
3.2	Äquivalentes TP-Übertragungssystem . . . . .	76
3.3	Vektordarstellung von Signalen . . . . .	79
3.3.1	Vektornorm . . . . .	79
3.3.2	Skalarprodukt . . . . .	80
3.3.3	Definition des Vektorraumes . . . . .	80
3.3.4	Vektordarstellung hochfrequenter Symbole . . . . .	81
3.4	Einzelträgerübertragung . . . . .	85
3.4.1	Amplitudenmodulation . . . . .	86
3.4.2	Phasenmodulation . . . . .	91

3.4.3	Quadratur-Amplitudenmodulation . . . . .	95
3.4.4	Frequenzmodulation . . . . .	98
3.5	Mehrträgerübertragung . . . . .	110
3.5.1	OFDM . . . . .	111
3.5.2	GFDM . . . . .	120
3.6	Orthogonale Modulationsverfahren . . . . .	124
3.7	Optimaler Signalempfang . . . . .	133
3.7.1	Allgemeines . . . . .	133
3.7.2	Kohärenter Empfang . . . . .	133
3.7.3	Nichtkohärenter Empfang . . . . .	146
3.8	Bit- und Symbolfehlerwahrscheinlichkeit . . . . .	158
3.8.1	Binäre kohärente Signalübertragung . . . . .	158
3.8.2	Mehrwertente kohärente Signalübertragung . . . . .	163
3.8.3	Nichtkohärente Signalübertragung . . . . .	170
<b>A</b>	<b>Mathematischer Anhang</b>	<b>175</b>
A.1	Dirac-Impulsfolgen im Zeit- und Frequenzbereich . . . . .	175
A.2	Abtastamplitudenfehler bei si-Impulsen . . . . .	176
A.3	Duobinärübertragung mit Vorcodierung . . . . .	177
A.4	Energiespektrum des Rechteck-Doppelimpulses . . . . .	179
A.5	Rauschen im äquivalenten TP-System . . . . .	180
A.6	Leistungsspektrum von Bandpasssignalen . . . . .	181
A.7	Leistungsspektrum von $M$ -ASK-Signalen . . . . .	182
A.8	Leistungsspektrum von $M$ -PSK-Signalen . . . . .	184
A.9	Minimaler Vektorabstand bei $M$ -QAM . . . . .	185
A.10	Leistungsspektrum von $M$ -QAM-Signalen . . . . .	186
A.11	Orthogonalitätsbedingung für Sinus- signale . . . . .	187
A.12	Leistungsspektrum von $M$ -FSK mit Phasensprüngen . . . . .	188
A.13	Signalvektordiagramme für MSK . . . . .	191
A.14	Zusammenhang zwischen OQPSK und MSK . . . . .	193
A.15	$\bar{d}_{\min}$ bei Orthogonalmodulation mit biorthogonalen Sequenzen . . . . .	196
A.16	Varianz der Empfangsvektor-Komponenten . . . . .	196
A.17	Berechnung des Skalarproduktes $\mathbf{y}^T \mathbf{s}_m$ . . . . .	197
A.18	Likelihood $p(\mathbf{y} \mathbf{s}_m)$ für nichtkohärente $M$ -ASK . . . . .	198
A.19	Nichtkohärente $M$ -ASK . . . . .	198
A.20	Rayleigh- und Rice-Verteilung . . . . .	200
	<b>Abkürzungen</b>	<b>203</b>
	<b>Symbolverzeichnis</b>	<b>205</b>

# Kapitel 1

## Einleitung

### 1.1 Historische Entwicklung der Datenübertragung

Die Nachrichtenübertragungstechnik ist ein wesentlicher Bestandteil der Infrastruktur unserer modernen Gesellschaft. Ein geschichtlicher Rückblick bis in die Antike zeigt jedoch, dass der schnellen und sicheren Übertragung von Nachrichten schon immer eine große Bedeutung beigemessen wurde (Kuriere als berittene Reiter, Nachrichtenübermittlung durch Rauchzeichen, Fackelsignale, Semaphore, Brieftauben etc.), und dass das rechtzeitige Eintreffen oder das Fehlen einer Information Einfluss auf den Verlauf unserer Geschichte genommen hat.

Die Geschichte der elektrischen Nachrichtenübertragungstechnik beginnt in der Mitte des 19. Jahrhunderts. Interessant ist, dass sie mit der Übertragung digitaler Signale beginnt:

- 1844 überträgt Samuel Morse zum ersten Mal Nachrichten auf einer 60 km langen Strecke von Baltimore nach Washington. Die Textinformation wurde dabei mit einem Strich-Punkt-Alphabet codiert, das heute nach seinem Erfinder den Namen Morsealphabet trägt. Elektrische Telegrafverbindungen entstehen wenig später in vielen Teilen der Welt. Ende des 19. Jahrhunderts erfinden Siemens und Halske den komfortableren, elektrischen Fernschreiber, der wie eine Schreibmaschine zu bedienen ist und die Codierung der Zeichen automatisch realisiert. Mit Hilfe der Telegrafie gelingt es, Nachrichten drahtgebunden weltweit zu übertragen. Die dafür notwendige Signalverstärkung übernimmt das elektromagnetische Relais (Bild 1.1). Von großem Vorteil ist die Robustheit des Übertragungsverfahrens gegen Störungen, von Nachteil die geringe Übertragungsgeschwindigkeit bei einer manuellen Bedienung des Telegrafengerätes.
- Am 26. Oktober 1860 führt Philipp Reis in Frankfurt/Main dem "Physi-

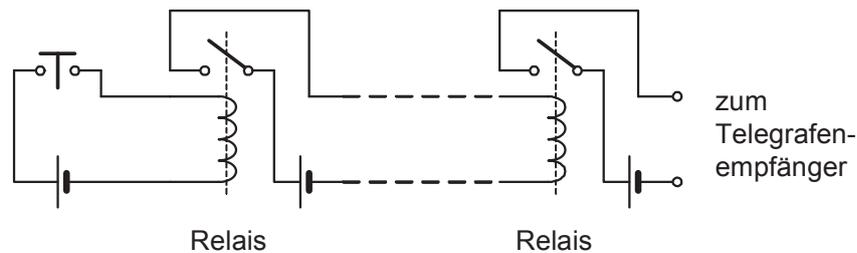


Bild 1.1: Verstärkung digitaler Signale mit Hilfe elektromagnetischer Relais

kalischen Verein” zum ersten Mal ein Gerät zur Sprachübermittlung vor, dem er den Namen Telefon gibt. Eine Krankheit verhindert jedoch die Weiterentwicklung und Vermarktung seiner Erfindung. Dies gelingt Alexander Graham Bell, der 1876 sein Telefon zum Patent anmeldet. Damit beginnt die Geschichte der drahtgebundenen, analogen Nachrichtentechnik. Telefonieren konnte man nur über geringe Entfernungen, da man analoge Signale nicht verstärken konnte. Eine größere Reichweite erzielte man zunächst nur durch eine höhere Leitungsinduktivität, indem man in regelmäßigen Abständen Spulen in die Übertragungsleitung einfügte, die sogenannten Pupinspulen. Mit der Erfindung der gesteuerten Elektronenröhre 1906 (Lee de Forest, Robert von Lieben) steht auch ein elektronischer Verstärker für analoge Signale zur Verfügung.

- Auch die drahtlose Nachrichtenübertragungstechnik beginnt digital. 1897 telegraphiert Marconi über den Bristol-Kanal (14 km). 1901 gelingt es ihm, Morsezeichen über den Atlantik zu übertragen, von Cornwall in Südeuropa nach Neufundland in Kanada (2500 km).
- Die drahtlose Übertragung analoger Nachrichten beginnt mit der Rundfunktechnik um 1920.

Die weitere Entwicklung der Nachrichtentechnik ist zunächst dadurch gekennzeichnet, dass analoge Signale analog übertragen werden, und die digitale Signalübertragung für die Telegrafie reserviert bleibt. Erst Ende der 60iger Jahre des vergangenen Jahrhunderts werden in den USA und Europa die ersten PCM-Telefonie-Systeme aufgebaut, mit denen eine digitale Sprach- und Musikübertragung in den Kabelnetzen der Postverwaltungen möglich wird. Mit der Entwicklung der Computertechnik in den 70iger und 80iger Jahren entsteht der Bedarf und der Zwang in großem Maße digitale Daten zu übertragen. Die *Digitale Signalübertragung* wird ein neuer Wissenschaftszweig der elektrischen Nachrichtentechnik und ist der Nachfolger der klassischen Disziplin *Telegrafie*. Der Aufbau des Internet in den 90iger Jahren erfordert eine schnelle Datenübertragung in einem weltweiten Datennetz. In den bestehenden Telefon-Kabelnetzen vollzieht sich eine rasche Umstellung der Signalübertragung von analog auf digital. Sie wird möglich

durch das Vorhandensein von leistungsfähigen und billigen Analog-Digital- und Digital-Analog-Wandlern für Audio- und Videosignale. Die Kabelsysteme nutzen nunmehr auch für die analogen Signale die Vorteile der digitalen Signalübertragung: Garantie hoher Qualität und Zuverlässigkeit unabhängig von der Übertragungsentfernung. Etwas anders verläuft die Entwicklung bei den Funksystemen. Bei ihnen steht die effiziente Verwendung der Frequenzressourcen an erster Stelle. Für ein analoges Signal entsteht nach der Analog-Digital-Wandlung ein Bandbreitebedarf, der von der Abtastfrequenz und der Quantisierungsgenauigkeit abhängt. Er ist jedoch bei einer Übertragung mit binären Symbolen in jedem Fall größer als für das analoge Quellensignal. Die analogen Signale werden daher in den Richtfunk-, Hörrundfunk- und Fernsehrundfunkssystemen weiterhin analog übertragen. Auch die Mobilfunkssysteme der ersten Generation, die in den 80iger Jahren aufgebaut werden, sind Analogsysteme und verwenden Schmalband-FM als Modulationsverfahren. Die Situation verändert sich erst mit der Erfindung und technischen Realisierung der Quellencodierung von analogen Signalen in den 90iger Jahren. Die Quellencodierung ermöglicht eine drastische Datenreduktion von Audio- und Videosignalen durch die Entfernung von redundanter und irrelevanter Information. Für die Realisierung der Kompressionsalgorithmen stehen heute leistungsfähige Signalprozessoren oder spezielle, hochintegrierte Codecs zur Verfügung. Mit Hilfe der Quellencodierung haben sich nun die Verhältnisse umgekehrt. Heute ist es möglich, analoge Signale effizienter digital als analog zu übertragen. Damit sind alle Voraussetzungen erfüllt, dass in Zukunft überall die analoge durch eine digitale Signalübertragung abgelöst wird. Dieser Ablösungsprozess ist in vollem Gange. Die modernen Mobilfunkssysteme nach dem GSM- oder UMTS-Standard übertragen digital. Auch bei den Rundfunkssystemen hat sich dieser Übergang weitestgehend vollzogen. DVB-T, DVB-S und DVB-C sind die Standards für das digitale Fernsehen in Europa. DAB und DRM sind Standards, die für die Ablösung des analogen UKW- und AM-Hörrundfunks erarbeitet wurden.

## 1.2 Basisband- und Bandpassübertragung

Die Signale, die von einer Signalquelle abgegeben werden (Mikrofonsignale, Bildsignale einer Kamera, Messsignale von Sensoren, Datensignale eines PC etc.) sind sogenannte Basisbandsignale. Ihre Leistung konzentriert sich bei tiefen Frequenzen. Die Übertragung dieser Signale kann entweder im Basisband erfolgen oder im Bandpassbereich, indem man einen hochfrequenten Träger moduliert. Beide Möglichkeiten finden Anwendung und haben ihre praktische Bedeutung. Die Bilder 1.2 und 1.3 zeigen die wesentlichen Baugruppen für eine Übertragung im Basisband oder im Bandpassbereich. Allerdings müssen nicht zwangsläufig alle dargestellten Baugruppen in einem praktischen Übertragungssystem vorhanden sein. Die mit einem Schatten versehenen Baugruppen bilden den fachlichen

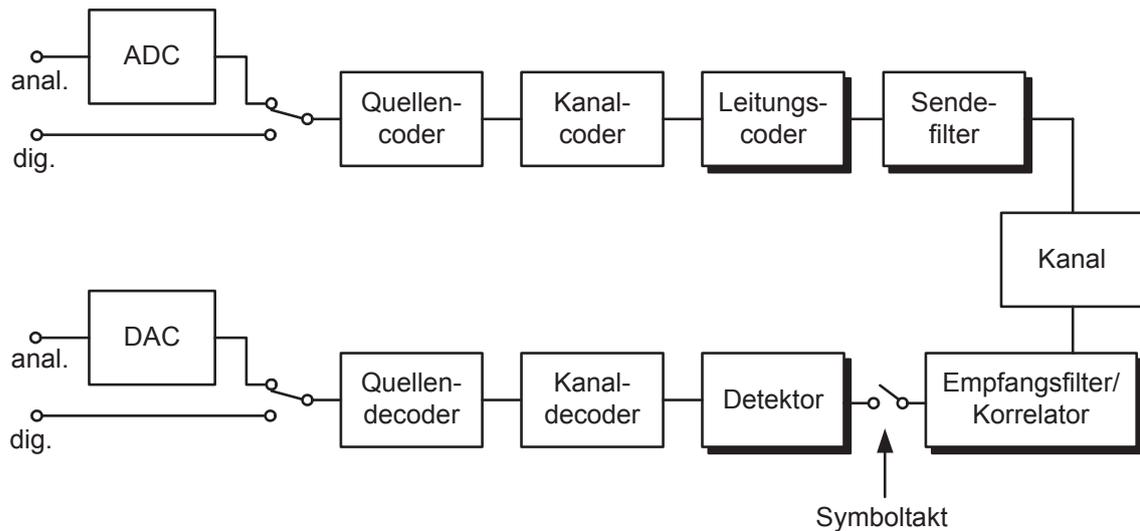


Bild 1.2: Signalübertragung im Basisband

Schwerpunkt des Buches. Man erkennt, dass die Signale vor ihrer Übertragung über den Kanal in verschiedenen Baugruppen vorverarbeitet werden. Eine digitale Übertragung von Analogsignalen erfordert zunächst eine Analog-Digital-Wandlung (ADC, *analog-digital conversion*). Die Quellencodierung reduziert die erforderliche Datenrate durch Datenkompression. Die digitalen Signale werden dann vor ihrer Übertragung kanalcodiert, um die Information möglichst gut vor Übertragungsfehlern zu schützen. Die bis hierher beschriebene Signalverarbeitung ist im Wesentlichen für die Übertragung im Basisband oder im Bandpassbereich gleich und ist nicht Gegenstand der Betrachtung in diesem Buches. Für beide Übertragungsmöglichkeiten ist eine Anpassung des Übertragungssignals an den Kanal erforderlich. Diese Anpassung wird für die Basisbandübertragung durch eine Leitungscodierung erreicht, für die Bandpassübertragung durch Modulation. Die Basisbandübertragung ist eine leitungsgebundene Übertragung. Sie erfordert z.B. eine Kupferleitung oder einen Lichtwellenleiter als Übertragungsmedium. Die Leitungscodierung bewirkt eine spektrale Formung, mit der man das Leistungsspektrum des Sendesignals beeinflussen kann. Sie ist z.B. erforderlich, wenn ein Signal mit Gleichkomponente über einen gleichstromundurchlässigen Kanal übertragen werden muss. Durch Leitungscodierung lässt sich ein gleichstromfreies Signal erzeugen und seine Signalbandbreite beeinflussen. Sie kann auch sicherstellen, dass das Empfangssignal ausreichend Taktinformation für eine zuverlässige Taktwiedergewinnung im Empfänger enthält. Das Sendefilter formt das Spektrum des Datensignals und sichert, dass das Sendesignal nur eine begrenzte Bandbreite belegt. Auf der Empfangsseite gelangt das Signal auf das Empfangsfilter oder alternativ auf einen Korrelator. Das Ausgangssignal von Empfangsfilter oder Korrelator wird im Symboltakt abgetastet und dem Detektor übergeben. Der Detektor trifft die Entscheidung über das gesendete Symbol. Danach erfolgt

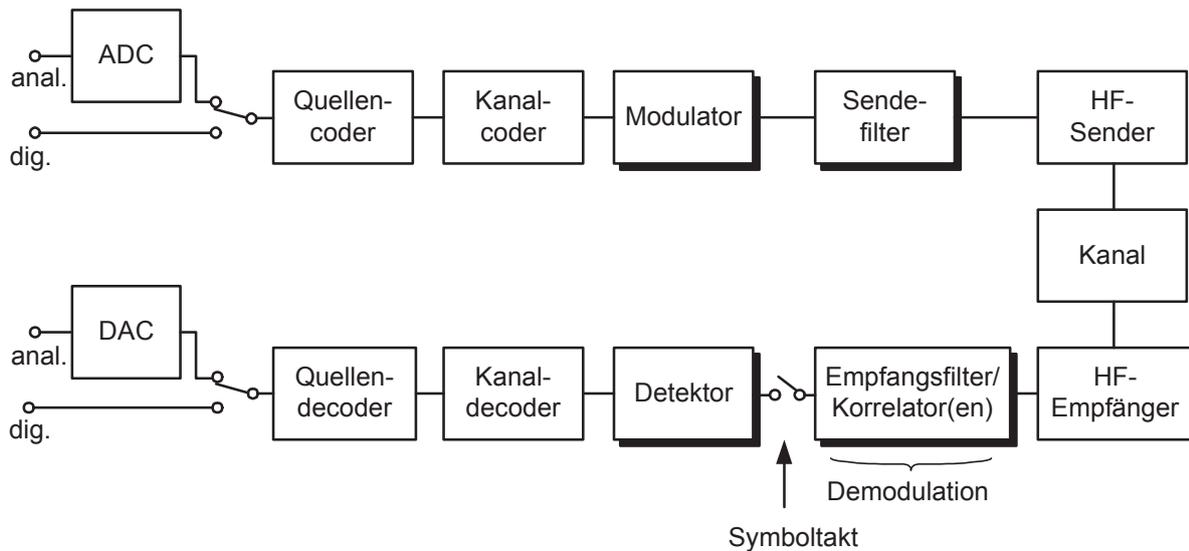


Bild 1.3: Signalübertragung im Bandpassbereich (modulierte Signalübertragung)

die Kanaldecodierung, um eventuelle Übertragungsfehler zu korrigieren, und die Quellendecodierung. Gesendete Analogsignale gelangen danach zu dem Digital-Analog-Wandler (DAC, *digital-analog conversion*).

In einem Bandpass-Übertragungssystem bewirkt die Modulation eines hochfrequenten Trägers, dass das Leistungsspektrum des Signals ein vorgesehene Hochfrequenzband belegt und gestattet in einem Funksystem die Signalabstrahlung über eine Antenne. Natürlich kann auch in einem leitungsgebundenen Übertragungssystem eine Übertragung mit modulierten Signalen erfolgen. In modernen Übertragungssystemen erfolgt die Modulation und die Demodulation durch digitale Signalverarbeitung im Basisband. Die Verschiebung des Basisbandsignals in den Bandpassbereich und die entsprechende Verschiebung des Bandpasssignals zurück in das Basisband erfolgt durch komplexe Mischung mit sogenannten I/Q-Mischern in dem HF-Sender bzw. HF-Empfänger. In diesem Sinne kann die Übertragung im Bandpassbereich als eine Basisbandübertragung betrachtet werden, die um den linearen Vorgang der spektralen Verschiebung in den Hochfrequenzbereich im Sender und den umgekehrten Prozess der spektralen Rückverschiebung im Empfänger ergänzt wurde. Das Blockschaltbild des Bandpass-Übertragungssystems umfasst daher nahezu alle Baugruppen des Basisband-Übertragungssystems und ist um die Baugruppen des HF-Senders und HF-Empfängers erweitert. Lediglich die Baugruppe Leitungscodierung wurde durch die Baugruppe Modulation ersetzt. Beide Baugruppen haben allerdings dieselbe Funktion, die spektrale Anpassung des Sendesignals an den gegebenen Übertragungskanal. Das Signal erleidet bei seiner Übertragung eine Veränderung durch die Einwirkung einer Vielzahl von Störeinflüssen. Dazu gehören die Überlagerung mit Rausch- und In-

terferenzsignalen, die Signalverformung durch lineare und nichtlineare Verzerrungen sowie die parasitäre Modulation durch einen zeitvarianten Kanal. Im Rahmen dieses Buches werden jedoch nur die linearen Verzerrungen des Übertragungskanals und AWGN-Störungen (*Additive White Gaussian Noise*) betrachtet. In diesem Modell wird das digitale Sendesignal über einen stationären, bandbegrenzten Kanal übertragen und mit einem Rauschsignal überlagert. Die Rauschamplituden sind gaußverteilt, aufeinanderfolgende Rauschabtastwerte sind unkorreliert. Dieses einfache Kanalmodell ist ausreichend, um wichtige Erkenntnisse über die betrachteten Übertragungsverfahren zu gewinnen.

# Kapitel 2

## Übertragung im Basisband

### 2.1 Intersymbolinterferenzfreie Impulsübertragung

#### 2.1.1 Übertragungsmodell

Das Datenübertragungssystem im Basisband soll durch das in Bild 2.1 dargestellte Blockschaltbild beschrieben werden. Das Eingangssignal  $d(t)$  für das Sendefilter ist eine Folge von Diracimpulsen

$$d(t) = AT \sum_{k=-\infty}^{\infty} d[k] \delta(t - kT),$$

die mit der zeitdiskreten Folge  $ATd[k]$  gewichtet werden, wobei  $d[k]$  die Datensymbole der Quelle bezeichnen. Für eine binäre Übertragung gilt z.B.

$$d[k] \in \{-1, 1\}.$$

Die Amplitude  $A$  regelt die Leistung des Sendesignals  $u(t)$ , die Taktperiode  $T$  die Übertragungsgeschwindigkeit. Das Sendefilter mit der Impulsantwort  $h_S(t)$  formt das Sendesignal

$$\begin{aligned} u(t) &= d(t) * h_S(t) \\ &= \left( AT \sum_{k=-\infty}^{\infty} d[k] \delta(t - kT) \right) * h_S(t) \\ &= AT \sum_{k=-\infty}^{\infty} d[k] h_S(t - kT) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} d[k] g(t - kT). \end{aligned} \tag{2.1.1}$$

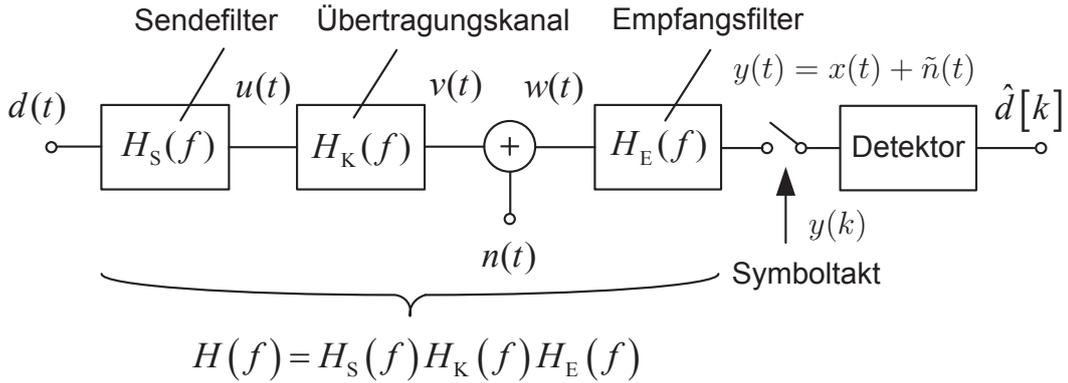


Bild 2.1: Blockschaltbild eines Datenübertragungssystems im Basisband

Der Zusammenhang zwischen Sendeimpuls  $g(t)$  und Impulsantwort des Sendefilters  $h_S(t)$  ist durch die Beziehung

$$g(t) = AT h_S(t), \quad 0 \leq t < T_g \quad (2.1.2)$$

gegeben, wobei  $T_g$  die Dauer des Impulses  $g(t)$  bzw. der Impulsantwort  $h_S(t)$  des Sendefilters bezeichnet. Für die Energie des Sendeimpulses gilt

$$\mathcal{E}_g = \int_0^{T_g} g^2(t) dt = A^2 T^2 \int_0^{T_g} h_S^2(t) dt = A^2 T^2 \int_{-\infty}^{\infty} |H_S(f)|^2 df. \quad (2.1.3)$$

Das Empfangssignal am Ausgang des Empfangsfilters ist mit  $y(t)$  bezeichnet und besteht aus dem unverrauschten Nutzsignal  $x(t)$  und dem gefilterten Rauschsignal  $\tilde{n}(t)$

$$y(t) = x(t) + \tilde{n}(t). \quad (2.1.4)$$

Das unverrauschte Empfangssignal berechnet sich durch Faltung des Eingangssignals mit der Impulsantwort des Übertragungssystems  $h(t)$

$$\begin{aligned} x(t) &= d(t) * h(t) \\ &= \left( AT \sum_{k=-\infty}^{\infty} d[k] \delta(t - kT) \right) * h(t) \\ &= AT \sum_{k=-\infty}^{\infty} d[k] h(t - kT) \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

mit

$$h(t) = h_S(t) * h_K(t) * h_E(t). \quad (2.1.6)$$

Die fouriertransformierte Impulsantwort  $h(t)$  liefert die Übertragungsfunktion des Systems  $H(f)$ , die sich durch Multiplikation der Übertragungsfunktionen  $H_S(f)$ ,  $H_K(f)$  und  $H_E(f)$  für Sendefilter, Übertragungskanal und Empfangsfilter ergibt

$$\mathfrak{F}\{h(t)\} = H(f) = H_S(f)H_K(f)H_E(f). \quad (2.1.7)$$

Dem Nutzsignal  $v(t)$  am Eingang des Empfangsfilters ist gaußsches weißes Rauschen  $n(t)$  additiv überlagert. Für diese Störung ist die Abkürzung AWGN (*additive white gaussian noise*) gebräuchlich. Ihre Autokorrelationsfunktion (AKF) lautet

$$\phi_{nn}(\tau) = \text{E}[n(t)n(t + \tau)] = \frac{N_0}{2} \delta(\tau), \quad (2.1.8)$$

wobei  $N_0/2$  die zweiseitige Rauschleistungsdichte

$$\Phi_{nn}(f) = \mathfrak{F}\{\phi_{nn}(\tau)\} = \frac{N_0}{2} \quad (2.1.9)$$

bezeichnet. Der Detektor trifft die Entscheidung über die gesendeten Symbole und gibt im Symboltakt die geschätzten Symbole  $\hat{d}[k]$  aus. Fehlentscheidungen sind bei dem gegebenen Übertragungsmodell nach Bild 2.1 als Folge linearer Signalverzerrungen und des Rauschens möglich.

### 2.1.2 1. Nyquistkriterium der Datenübertragung

In diesem Kapitel wird der Einfluss der linearen Verzerrungen auf das Sendesignal untersucht, wobei das Rauschen unbeachtet bleibt. Zunächst soll die Frage gestellt werden, welche Forderungen die Impulsantwort  $h(t)$  bzw. die Übertragungsfunktion  $H(f)$  eines verzerrungsfreien Übertragungssystems erfüllen muss. Verzerrungsfreie Übertragung heißt, dass die Signalform des Sendesignals erhalten bleibt. Erlaubt ist eine proportionale Veränderung des Signals (Amplitudenskalierung) sowie eine Signalverzögerung infolge der endlichen Ausbreitungsgeschwindigkeit der elektrischen bzw. elektromagnetischen Signale. Bild 2.2 zeigt ein solches verzerrungsfreies Übertragungssystem. Die Impulsantwort dieses Übertragungssystems ist ein verzögerter Diracimpuls

$$h(t) = c\delta(t - t_0), \quad (2.1.10)$$

der mit der Konstanten  $c$  multipliziert ist. Das Ausgangssignal  $x_2(t)$  berechnet sich dann zu

$$\begin{aligned} x_2(t) &= h(t) * x_1(t) \\ &= c\delta(t - t_0) * x_1(t) \\ &= cx_1(t - t_0). \end{aligned}$$

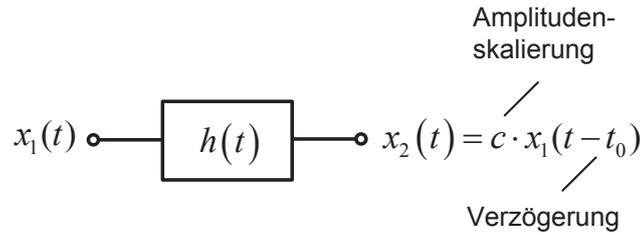


Bild 2.2: Verzerrungsfreies Übertragungssystem

Die Fouriertransformation dieser Beziehung liefert die entsprechende Forderung an die Übertragungsfunktion  $H(f)$

$$H(f) = \mathfrak{F}\{h(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j2\pi ft} dt = \frac{X_2(f)}{X_1(f)} = c e^{-j2\pi ft_0}. \quad (2.1.11)$$

Der Betrag der Übertragungsfunktion eines verzerrungsfreien Systems muss konstant sein

$$|H(f)| = c, \quad (2.1.12)$$

das Argument der Übertragungsfunktion eine lineare Funktion der Frequenz

$$\arg(H(f)) = -2\pi ft_0. \quad (2.1.13)$$

Der Zusammenhang zwischen Übertragungsfunktion  $H(f)$  und Dämpfung  $a(f)$  und Phase lautet  $b(f)$

$$H(f) = e^{-(a(f)+jb(f))}. \quad (2.1.14)$$

Daraus folgen die bekannten Bedingungen einer verzerrungsfreien Übertragung für Dämpfung

$$a(f) = -\ln|H(f)| = \text{const}, \quad (2.1.15)$$

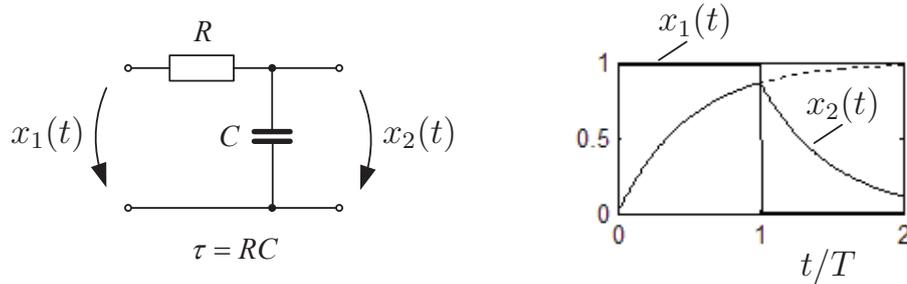
Phase

$$b(f) = -\arg(H(f)) = 2\pi ft_0 \quad (2.1.16)$$

und Gruppenlaufzeit

$$t_{\text{gr}}(f) = \frac{1}{2\pi} \frac{db(f)}{df} = t_0. \quad (2.1.17)$$

Das heißt, ist die Dämpfung eines Übertragungssystems konstant und die Phase linear, dann werden alle Spektralkomponenten des Sendesignals gleichermaßen gedämpft und verzögert, das Empfangssignal bleibt unverzerrt. Sind diese Bedingungen jedoch innerhalb der Signalbandbreite nicht erfüllt, resultieren daraus Dämpfungs- und Phasenverzerrungen des Signals. Diese Verzerrungen werden unter dem Begriff *lineare Verzerrungen* zusammengefasst. Lineare Verzerrungen verursachen Einschwingvorgänge und beeinflussen daher aufeinanderfolgende Symbole. Dieses Phänomen wird als Intersymbolinterferenz (ISI) bezeichnet.

Bild 2.3: Verzerrung eines Rechteckimpulses durch ein RC-Glied ( $\tau = T/2$ )

Beispiel:

Bild 2.3 zeigt wie ein Rechteckimpuls  $x_1(t)$  der Dauer  $T$  durch ein RC-Glied mit der Zeitkonstanten  $\tau = RC = T/2$  verzerrt wird. Der Ausgangsimpuls  $x_2(t)$  erstreckt sich über mehr als zwei Symbolperioden  $T$  und verursacht damit ISI. Eine Analyse zeigt, dass weder die Dämpfungs- noch die Phasenbedingungen für ein verzerrungsfreies System eingehalten werden. Die Übertragungsfunktion beträgt

$$H(f) = \frac{X_2(f)}{X_1(f)} = \frac{1}{\sqrt{1 + (2\pi f\tau)^2}} e^{-j \arctan(2\pi f\tau)}.$$

Für die Dämpfung und Phase erhält man daraus die Beziehungen

$$\begin{aligned} a(f) &= 0.5 \ln(1 + (2\pi f\tau)^2), \\ b(f) &= \arctan(2\pi f\tau). \end{aligned}$$

ISI macht das Empfangssymbol störanfälliger gegenüber Rauschstörungen. Im Vergleich zu einer ISI-freien Übertragung können schon kleinere Störampplituden zu einer Fehlentscheidung führen. Da in praktischen Übertragungssystemen die Signalbandbreite immer begrenzt ist, lässt sich die Forderung nach konstanter Dämpfung nur innerhalb eines gegebenen Frequenzbandes realisieren. Es ist daher die Frage zu untersuchen, ob für bandbegrenzte Signale ISI verhindert werden kann. Für diese Untersuchung sollen folgende Annahmen für das Übertragungssystem gemacht werden:

1. Die Impulsantwort ist kausal :  $h(t) = 0$  für  $t < 0$
2. Die Impulsantwort besitzt Maximalwert bei  $t_0$ :  $\max\{h(t)\} = h(t_0) = 1/T$
3. Die Übertragungsfunktion besitzt eine lineare Phase (Impulsantwort ist symmetrisch zu  $t_0$ ):  $H(f) = |H(f)| e^{-j2\pi f t_0}$

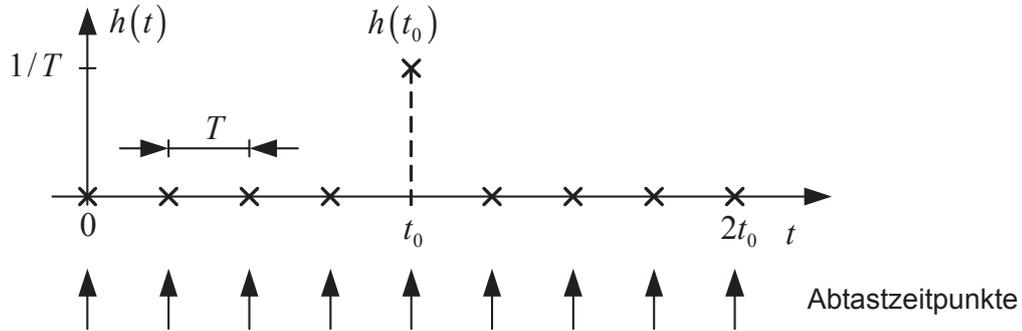


Bild 2.4: Abtastwerte einer Impulsantwort für ein ISI-freies Übertragungssystem

Das heisst, die Impulsantwort  $h(t)$  lässt sich aus einer geraden Funktion ableiten, die sich von  $-t_0$  bis  $t_0$  erstreckt, bei  $t = 0$  ihr Maximum hat und um  $t_0$  verzögert wird.

Nach (2.1.5) berechnet sich das unverrauschte Empfangssignal  $x(t)$  am Ausgang des Empfangsfilters zu

$$x(t) = AT \sum_{k=-\infty}^{\infty} d[k]h(t - kT).$$

Zum Zeitpunkt  $t = t_0 + lT$  erhält man

$$\begin{aligned} x(t_0 + lT) &= AT \sum_{k=-\infty}^{\infty} d[k]h(t_0 + (l - k)T) \\ &= Ad[l] + AT \underbrace{\sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq l}}^{\infty} d[k]h(t_0 + (l - k)T)}_{\text{ISI}}. \end{aligned} \quad (2.1.18)$$

Der Term  $Ad[l]$  ist der ungestörte Empfangswert. Der nachfolgende Summenausdruck beschreibt eine Störung infolge ISI. Es ist offensichtlich, dass die Störung zu den Abtastzeitpunkten  $t = t_0 + lT$  vermieden werden kann, wenn die Impulsantwort die Bedingung

$$h(t_0 + kT) = \begin{cases} h(t_0) = 1/T, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases} \quad (2.1.19)$$

erfüllt. Das heisst, die Impulsantwort muss rechts und links von ihrem Maximalwert  $h(t_0)$  in regelmäßigen Abständen  $T$  Nulldurchgänge aufweisen (Bild 2.4). Diese Bedingung lässt sich mathematisch in folgender Form beschreiben

$$h(t)T \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0 - kT) = Th(t_0)\delta(t - t_0) = \delta(t - t_0). \quad (2.1.20)$$

Fourier-Transformation der beiden Seiten und Umformungen (siehe Anhang A.1, (A.1.6) und (A.1.7)) ergeben

$$\begin{aligned}
H(f) * T \mathfrak{F}\left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0 - kT) \right\} &= \\
|H(f)| e^{-j2\pi f t_0} * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{k}{T}\right) e^{-j2\pi f t_0} &= \\
\sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta\left(\nu - \frac{k}{T}\right) e^{-j2\pi \nu t_0} |H(f - \nu)| e^{-j2\pi(f-\nu)t_0} d\nu &= \\
\sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta\left(\nu - \frac{k}{T}\right) |H(f - \nu)| d\nu e^{-j2\pi f t_0} &= \\
\sum_{k=-\infty}^{\infty} |H\left(f - \frac{k}{T}\right)| e^{-j2\pi f t_0} &= e^{-j2\pi f t_0}.
\end{aligned}$$

Der Term  $e^{-j2\pi f t_0}$  auf beiden Seiten der Gleichung kürzt sich, so dass die Bedingung für den Betrag einer ISI-freien Übertragungsfunktion in folgender Form geschrieben werden kann

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |H\left(f - \frac{k}{T}\right)| = 1. \quad (2.1.21)$$

Die Phase muss, entsprechend der gemachten Annahmen über die Impulsantwort, die Linearitätsbedingung

$$\arg(H(f)) = -b(f) = -2\pi f t_0 \quad (2.1.22)$$

erfüllen. Die Gleichungen (2.1.21) und (2.1.22) beschreiben die 1. Nyquistbedingung bzw. 1. Nyquistkriterium (NK) der Datenübertragung. Mit Hilfe dieser Beziehungen lässt sich leicht prüfen, ob eine Übertragungsfunktion eine ISI-freie Übertragung ermöglicht. Gleichung (2.1.21) besagt, dass die mit einem Frequenzabstand von  $1/T$  aneinandergereihten Beträge der Übertragungsfunktion einen konstanten Verlauf ergeben müssen. Die Handhabung der Gleichung soll nachfolgend an einigen Beispielen gezeigt werden.

### Idealer Tiefpass

Die Übertragungsfunktion des idealen Tiefpasses lautet (Bild 2.5)

$$H_{\text{ITP}}(f) = \begin{cases} e^{-j2\pi f t_0}, & -f_g \leq f < f_g \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}. \quad (2.1.23)$$

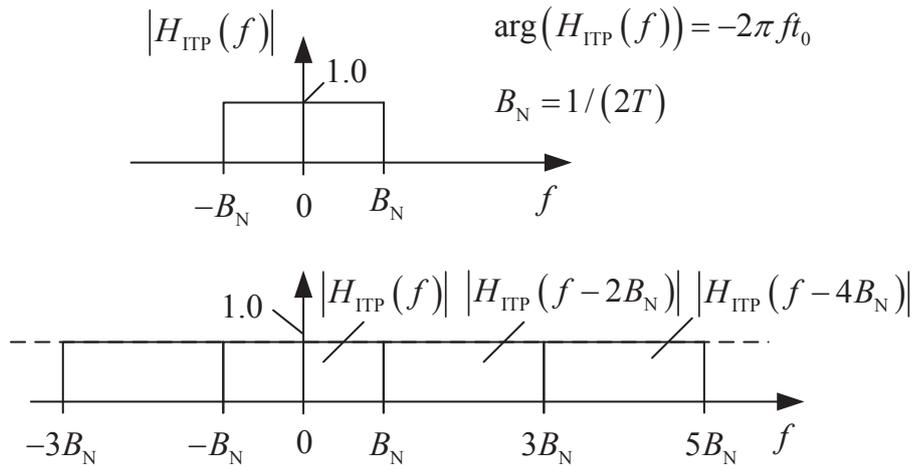


Bild 2.5: Erfüllung des 1. NK (Gleichung (2.1.21)) durch den idealen Tiefpass

Der ideale Tiefpass erfüllt das 1. NK mit minimaler Bandbreite. Diese minimale Bandbreite  $f_g = B_N$  wird auch als Nyquistbandbreite bezeichnet. Die Impulsantwort des idealen Tiefpasses ist die Spaltfunktion oder si-Funktion (Bild 2.6), die periodische Nulldurchgänge in Zeitabständen von  $\Delta t = T = 1/(2B_N)$  besitzt

$$\begin{aligned}
 h_{\text{ITP}}(t) &= \mathfrak{F}^{-1}\{H_{\text{ITP}}(f)\} = \int_{-B_N}^{B_N} e^{-j2\pi ft_0} e^{+j2\pi ft} df & (2.1.24) \\
 &= 2B_N \frac{\sin 2\pi B_N(t - t_0)}{2\pi B_N(t - t_0)} = 2B_N \text{si}(2\pi B_N(t - t_0)) = \frac{1}{T} \text{si}\left(\pi \frac{t - t_0}{T}\right).
 \end{aligned}$$

Überträgt man daher mit si-Impulsen und wählt die Impulsrate  $R = 1/T = 2B_N$ , wird ISI zu den Abtastzeitpunkten vermieden. Für die praktische Realisierung ist zu beachten, dass die Impulsantwort des idealen Tiefpasses theoretisch eine unendliche Ausdehnung besitzt. Mit einer zeitlichen Begrenzung der si-Funktion auf die Dauer  $2t_0$  (Fensterung) und einer zeitlichen Verschiebung um die Dauer  $t_0$  lässt sich die Impulsantwort des idealen Tiefpass approximieren und ein kausales Filter ableiten. Es ist jedoch anzumerken, dass die Betragswerte der si-Funktion  $|\text{si}(\pi(l + 1/2))|$  zu den Zeiten  $t = t_0 + T(l + 1/2)$  nur mit  $1/l$  abnehmen, und damit eine nichtkonvergente Reihe bilden. Das heißt, für eine genaue Approximation des idealen Tiefpasses mit einem FIR-Filter muss eine lange Verzögerungszeit  $t_0$  gewählt werden.

Die Erfüllung des 1. NK lässt sich messtechnisch sehr anschaulich mit dem sogenannten Augendiagramm überprüfen. Das Augendiagramm entsteht, wenn man eine Impulsfolge oszillografiert, und die Triggerperiode des Oszillografen auf zwei

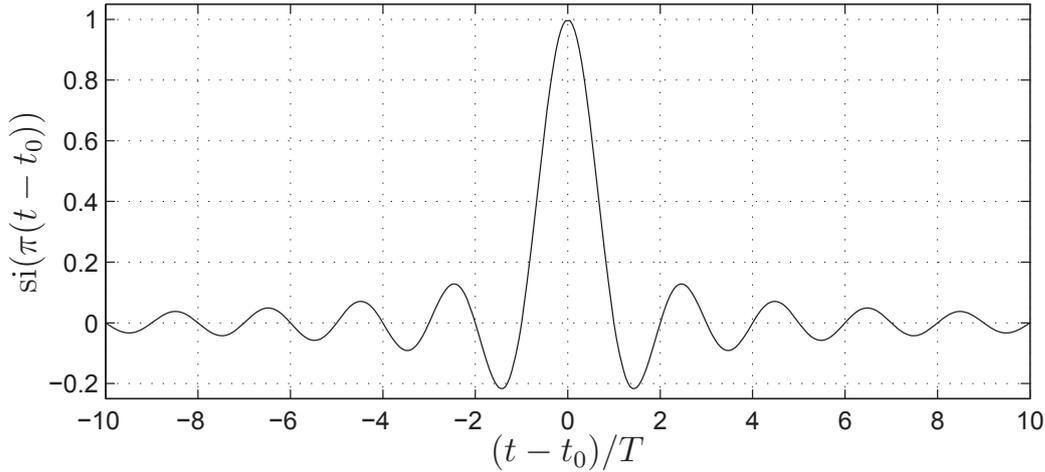


Bild 2.6: Spaltfunktion oder si-Funktion

Taktperioden einstellt. Das Übereinanderschreiben der Impulse erzeugt dann das Augendiagramm. In Bild 2.7 ist das Augendiagramm für eine binäre Impulsfolge  $u(t)$  mit si-Impulsen veranschaulicht

$$u(t) = A \sum_k d[k] \text{si}(\pi(t/T - k)), \quad d[k] \in \{-1, 1\}.$$

Man erkennt, dass das 1. NK erfüllt ist, da zu den normierten Abtastzeitpunkten  $\text{mod}((t-t_0)/T, 2) = 1$  alle Trajektorien einen der beiden normierten Amplitudenwerte  $\pm 1$  schneiden und damit die maximale vertikale Augenöffnung entsteht. Da die si-Impulse nur langsam abklingen und ihre Erzeugung daher aufwendig ist, hat man nach anderen Filterfunktionen gesucht, die sich mit geringerem technischen Aufwand realisieren lassen und ebenfalls das 1. NK erfüllen. Für die Konstruktion solcher Filterfunktionen ist eine andere Formulierung des 1. NK hilfreich. Es lässt sich leicht zeigen, dass das 1. NK erhalten bleibt, wenn man zu der Betragsfunktion des idealen TP  $|H_{\text{ITP}}(f)|$  ein Zusatzfilter mit reeller Übertragungsfunktion  $H_{\text{ZF}}(f)$  addiert

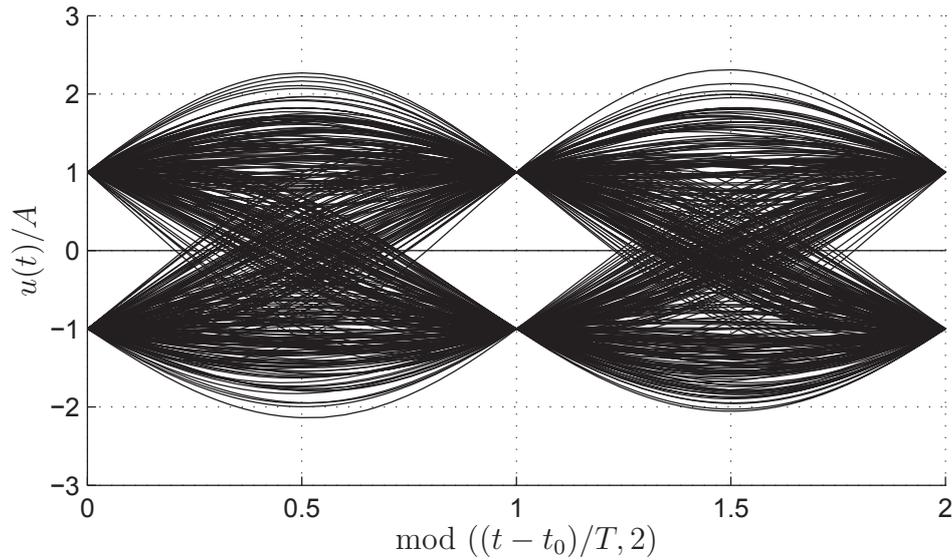
$$|H(f)| = |H_{\text{ITP}}(f)| + H_{\text{ZF}}(f), \quad (2.1.25)$$

das eine ungerade Symmetrie bezüglich der Grenzfrequenz  $f_g = B_N$  aufweist (vgl. Bild 2.8 oder 2.10). Unter diesen Bedingungen gilt

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} H_{\text{ZF}}(f - \frac{k}{T}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_{\text{ZF}}(f - k2B_N) = 0, \quad (2.1.26)$$

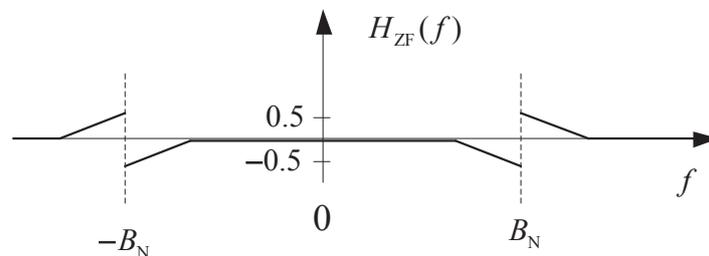
und die Bedingung für das 1. NK

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |H(f - \frac{k}{T})| = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |H_{\text{ITP}}(f - \frac{k}{T})| + \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} H_{\text{ZF}}(f - \frac{k}{T})}_{=0} = 1.0 \quad (2.1.27)$$

Bild 2.7: Augendiagramm für ein binäres Signal  $u(t)$  mit si-Impulsen

bleibt erfüllt. Mit Hilfe des Zusatzfilters lassen sich Übertragungsfunktionen mit einem kontinuierlichen Übergang von dem Durchlass- in den Sperrbereich ableiten. Damit können auf Kosten einer erhöhten Bandbreite Impulse mit günstigem Einschwingverhalten erzeugt werden. Als Beispiele werden nachfolgend das Filter mit linearer Flanke und mit RC-Roll-Off-Flanke betrachtet. Die Abkürzung RC steht dabei für *Raised-Cosine* (*angehobener Cosinus*) und bezeichnet einen Signalverlauf gemäß

$$\frac{1}{2}(1 + \cos 2x) = \cos^2 x. \quad (2.1.28)$$

Bild 2.8: Zusatzfilter mit linearer Flanke und ungerader Symmetrie bezüglich  $B_N$

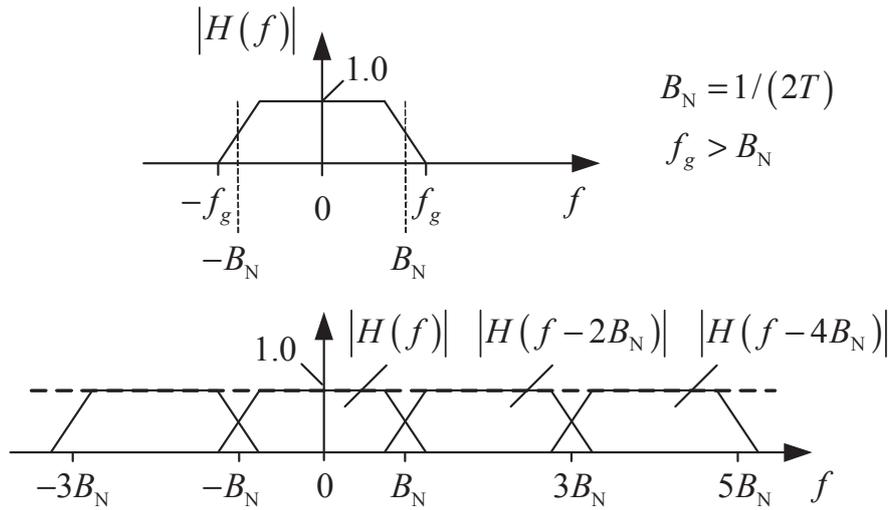


Bild 2.9: Erfüllung des 1. NK (Gleichung (2.1.21)) durch den Tiefpass mit linearer Flanke

**Übertragungsfunktion mit linearer Flanke**

Ein Zusatzfilter nach Bild 2.8 führt auf eine Übertragungsfunktion mit einer linearen Flanke. Aus Bild 2.9 wird ersichtlich, dass eine solche Übertragungsfunktion das 1.NK erfüllt.

**Übertragungsfunktion mit Raised-Cosinus-Roll-Off (RC-Spektrum)**

Verwendet man ein Zusatzfilter mit 1/4-Sinus-Perioden-Flanke nach Bild 2.10, dann lässt sich die Betragsfunktion eines Filters mit RC-Roll-Off formen

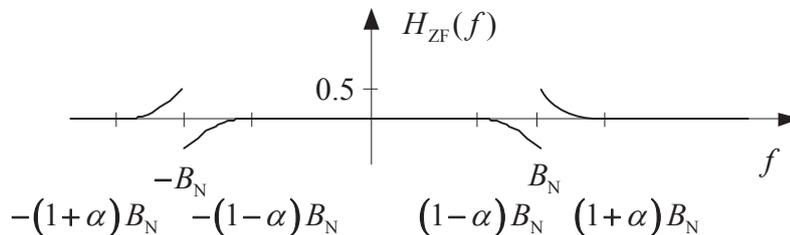


Bild 2.10: Zusatzfilter mit 1/4-Sinus-Perioden-Flanke und ungerader Symmetrie bezüglich  $B_N$

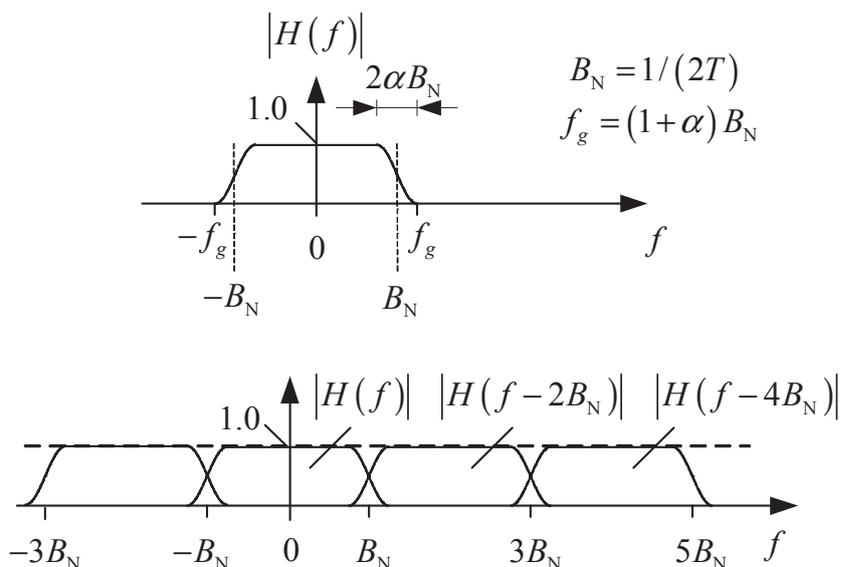


Bild 2.11: Erfüllung des 1. NK (Gleichung (2.1.21)) durch den Tiefpass mit Raised-Cosine-Roll-Off

$$|H(f)| = \begin{cases} 1, & |f| < (1 - \alpha)B_N \\ \cos^2 [\pi(f - (1 - \alpha)B_N)/(4\alpha B_N)], & (1 - \alpha)B_N \leq |f| \leq (1 + \alpha)B_N \\ 0, & |f| > (1 + \alpha)B_N \end{cases} \quad (2.1.29)$$

In Bild 2.11 ist dieser Betragsverlauf dargestellt. Man erkennt, dass das 1.NK gemäß Gleichung (2.1.21) erfüllt ist. Die Bandbreite dieses Filters beträgt  $f_g = (1 + \alpha)B_N$  und kann mit dem Roll-Off-Faktor ( $\alpha = 0, \dots, 1$ ) in dem Bereich zwischen einfacher und doppelter Nyquistbandbreite ( $f_g = B_N, \dots, 2B_N$ ) eingestellt werden. Die Impulse mit RC-Roll-Off-Spektrum, nachfolgend kürzer als Impulse mit RC-Spektrum bezeichnet, berechnen sich zu

$$h(t) = \mathfrak{F}^{-1}\{H(f)\} = 2B_N \operatorname{si}(2\pi B_N(t - t_0)) \frac{\cos(2\pi\alpha B_N(t - t_0))}{1 - (4\alpha B_N(t - t_0))^2}. \quad (2.1.30)$$

Man erkennt, dass für  $\alpha = 0$  nur die si-Funktion in obiger Gleichung übrigbleibt und die Impulsantwort des idealen Tiefpasses entsteht. Für  $\alpha > 0$  bleiben die Nullstellen der si-Funktion erhalten, gleichzeitig wird ein neuer, zweiter Faktor wirksam, der zusätzliche Nullstellen erzeugt und für ein schnelles Abklingen der Impulsantwort sorgt. Das Abklingen erfolgt umso schneller, je größer der Roll-Off-Faktor  $\alpha$  gewählt wird. Die Wahl von  $\alpha$  ist daher ein Kompromiss zwischen Bandbreitenvergrößerung und Verbesserung des Ausschwingverhaltens. Die Impulsantworten für  $\alpha = 0.5$  und  $\alpha = 1.0$  sind in Bild 2.12 und 2.13 dargestellt. Die Ausdehnung der Impulse ist im Vergleich zu dem si-Impuls gering. Die Vor- und Nachschwinger nehmen sehr rasch ab, so dass die Approximation dieser Impulse durch ein kausales Filter mit relativ geringem technischen Aufwand möglich ist.

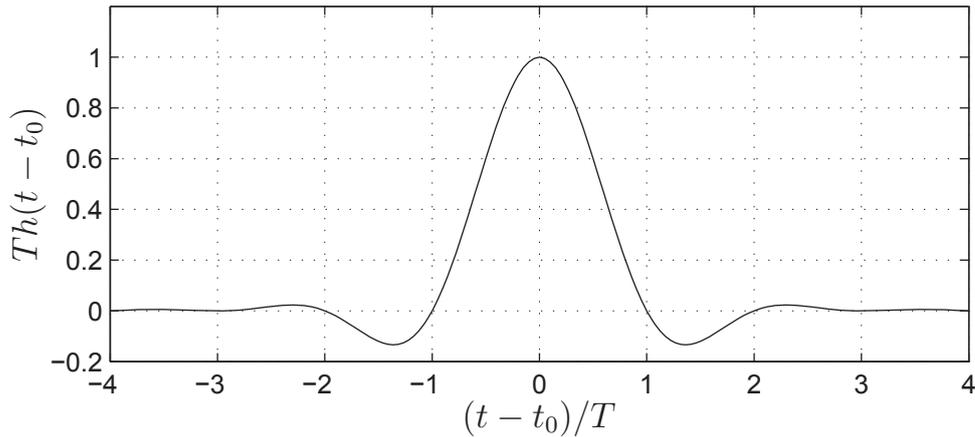
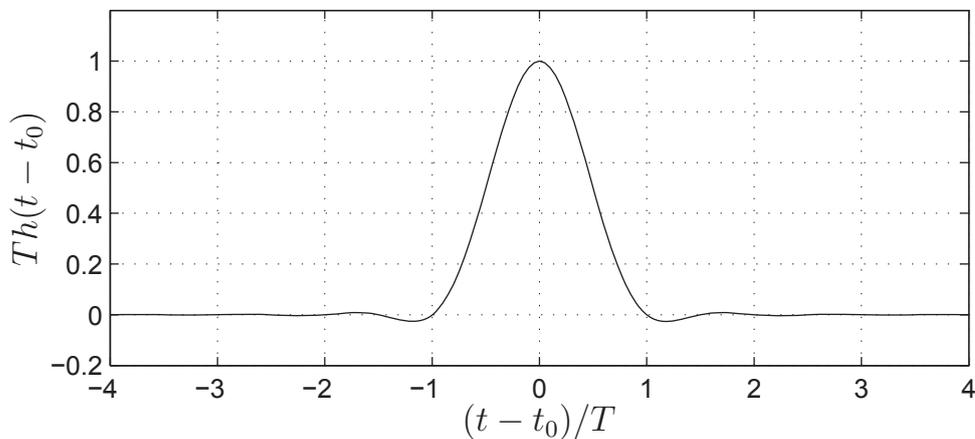
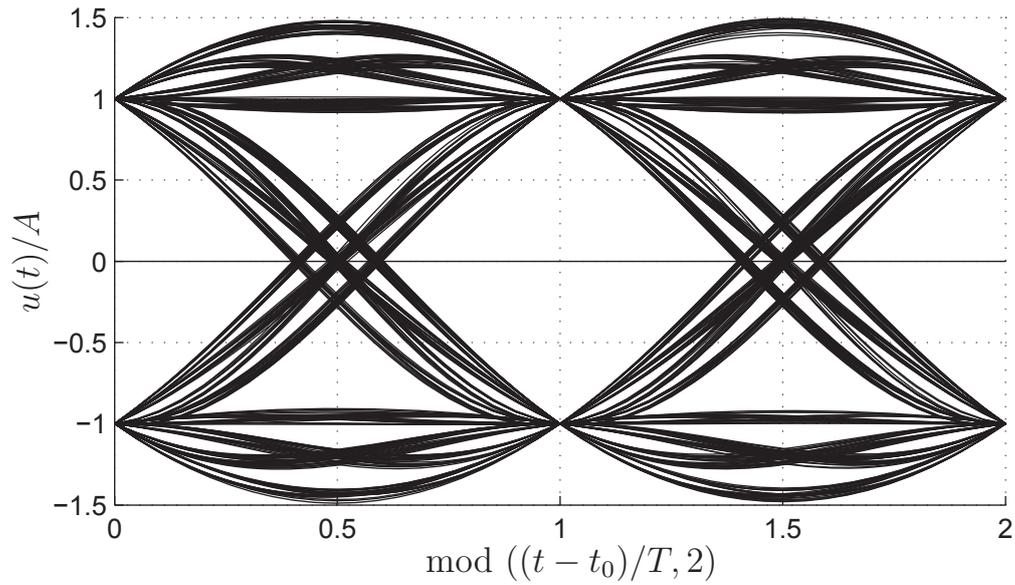
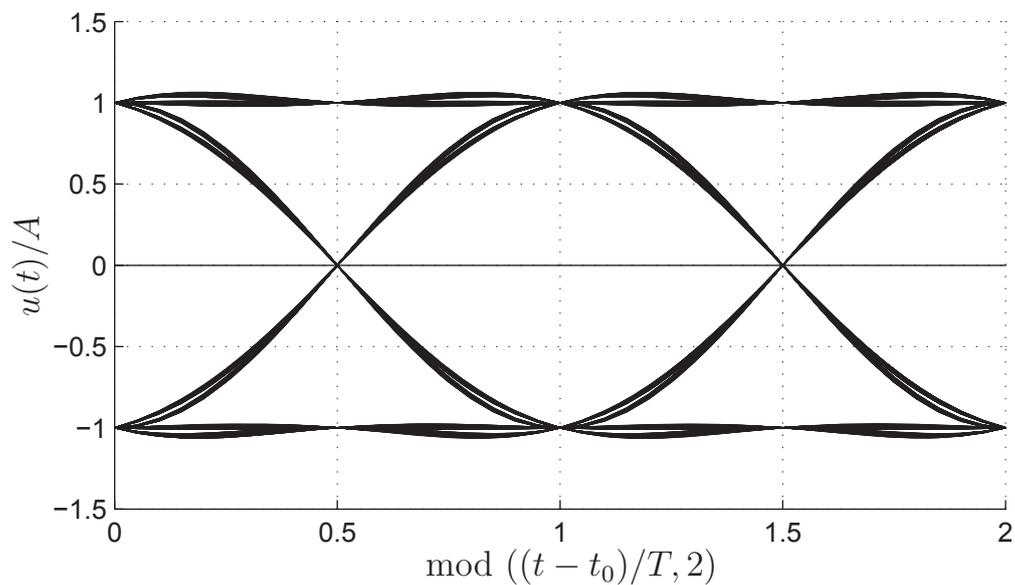
Bild 2.12: Impulsantwort eines Filters mit RC-Spektrum,  $\alpha = 0.5$ Bild 2.13: Impulsantwort eines Filters mit RC-Spektrum,  $\alpha = 1.0$ 

Bild 2.14 und 2.15 zeigen die Augendiagramme binärer Impulsfolgen  $u(t)$ , die von Impulsen  $g(t) = AT h(t)$  mit RC-Spektrum erzeugt werden. Zu den Abtastzeitpunkten ist die vertikale Augenöffnung maximal, es gibt kein ISI. Ein Vergleich mit Bild 2.7 zeigt, dass mit wachsendem  $\alpha$  die horizontale Augenöffnung größer wird. Für  $\alpha = 1.0$  wird auch die maximale horizontale Augenöffnung erreicht. Impulse, die die horizontale Augenöffnung maximieren, erfüllen das 2. Nyquistkriterium der Datenübertragung. Bei einer Programmierung der Gleichung (2.1.30) sind die Singularitäten bei  $t = t_0$  und  $t = t_0 + 1/(4\alpha B_N)$  zu beachten. An diesen Stellen lassen sich folgende Grenzwerte berechnen

$$h(t_0) = 2B_N = \frac{1}{T} \quad (2.1.31)$$

$$h\left(t_0 + \frac{1}{4\alpha B_N}\right) = h\left(t_0 + \frac{T}{2\alpha}\right) = \frac{\pi}{4T} \operatorname{si}\left(\frac{\pi}{2\alpha}\right). \quad (2.1.32)$$

Bild 2.14: Augendiagramm für Impulse mit RC-Spektrum,  $\alpha = 0.5$ Bild 2.15: Augendiagramm für Impulse mit RC-Spektrum,  $\alpha = 1.0$ 

### 2.1.3 2. Nyquistkriterium der Datenübertragung

Eine große horizontale Augenöffnung verringert die Anforderungen an die Genauigkeit des Abtastzeitpunktes. Daher ist die Fragestellung von Interesse, mit