

Tobias Zaiczek

Modellierung und Simulation zum Zwecke der Steuerung und Regelung von
Starrkörpersystemen

Beiträge aus der Regelungstechnik

Tobias Zaiczek

**Modellierung und Simulation zum Zwecke der
Steuerung und Regelung von Starrkörpersystemen**

 **VOGT**

Dresden 2015

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.dnb.de> abrufbar.

Bibliographic Information published by the Deutsche Nationalbibliothek
The Deutsche Nationalbibliothek lists this publication in the Deutsche Nationalbibliografie; detailed bibliographic data are available on the Internet at <http://dnb.dnb.de>.

Zugl.: Dresden, Techn. Univ., Diss., 2015

© Jörg Vogt Verlag 2015
Alle Rechte vorbehalten. All rights reserved.

Gesetzt vom Autor

ISBN 978-3-938860-99-1

Jörg Vogt Verlag
Niederwaldstr. 36
01277 Dresden
Germany

Phone: +49-(0)351-31403921
Telefax: +49-(0)351-31403918
e-mail: info@vogtverlag.de
Internet : www.vogtverlag.de

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

FAKULTÄT ELEKTROTECHNIK UND INFORMATIONSTECHNIK

Institut für Regelungs- und Steuerungstheorie

Modellierung und Simulation zum Zwecke der Steuerung und Regelung von Starrkörpersystemen

Von der Fakultät Elektrotechnik und Informationstechnik genehmigte

Dissertation

zur Erlangung des akademischen Grades

Doktoringenieur

(Dr.-Ing.)

von

Dipl.-Ing. Tobias Zaiczek

Vorsitzender: Prof. Dr. techn. K. Janschek

Gutachter: Prof. Dr.-Ing. Dr. rer. nat. K. Reinschke
Prof. Dr.-Ing. M. Beitelschmidt

Tag der Einreichung: 30. April 2015

Tag der Verteidigung: 20. November 2015

Meinen lieben Eltern

Kurzfassung

Die vorliegende Arbeit beinhaltet Methoden zur Beschreibung von Starrkörpersystemen sowie deren Anwendung für den Entwurf von Steuerungen und Regelungen. Im ersten Teil dieser Arbeit wird ein alternatives Konzept zur Beschreibung von Starrkörpersystemen vorgestellt, das bereits 1924 von R. VON MISES eingeführt wurde. Dieses Konzept basiert auf der Definition algebraischer Objekte, die Motoren genannt und auf deren Grundlage in dieser Arbeit die Bewegungsgleichungen allgemeiner Starrkörpersysteme abgeleitet werden. Dabei wird auf die Modellierung typischer Gelenkarten ebenso eingegangen wie auf die Wahl geeigneter Koordinaten für Starrkörpersysteme mit geschlossenen kinematischen Ketten.

Im zweiten Teil dieser Arbeit werden Konzepte für die Steuerung und Regelung der zuvor abgeleiteten Modelle ausführlich diskutiert. Dabei beschränkt sich die Arbeit im Wesentlichen auf Entwurfsmethoden für lineare, kontinuierliche und zeitinvariante Modelle (LTI-Systeme) mit mehreren unabhängigen Eingangsgrößen. Im Vordergrund stehen hierbei die Trajektorienplanung und der Steuerungsentwurf auf der Grundlage von Basisgrößen sowie der Reglerentwurf durch die Vorgabe von Nullstellen des charakteristischen Polynoms des geschlossenen Regelkreises. Für Systeme in Zustandsdarstellung wird ein Algorithmus untersucht und erweitert, der die vorhandenen Freiheiten bei der Wahl einer statischen Zustandsrückführung dazu nutzt, die Robustheit der gewünschten Nullstellenplatzierung gegenüber Änderungen der Systemmatrizen zu erhöhen.

Abstract

This thesis covers methods for the description of rigid multibody systems and their application to the design of feed-forward and feedback controllers. In the first part, an alternative concept for the description of rigid body systems is presented, that was introduced by R. VON MISES in 1924. This concept is based on the definition of algebraic objects called motors, which are used in this thesis to derive the equations of motion of general rigid body systems. The thesis describes the modelling of typical joints as well as a suitable choice of coordinates for rigid body systems with closed kinematic loops.

In the second part of the thesis, different concepts for the control of the previously derived models are discussed in detail. Essentially, this thesis deals with design methods for linear, continuous, and time-invariant models (LTI systems) with several independent inputs. In particular, this work includes trajectory planning, the design of feed-forward controllers by means of basis variables and feedback controllers through the specification of zeros for the closed-loop characteristic polynomial. For systems in state-space form, an algorithm is investigated and extended that utilises the degrees of freedom in choosing a static state feedback in order to improve robustness of the zero placement with respect to changes in the system matrices.

Danksagung

Mein ganz besonderer Dank gilt Herrn Prof. Dr.-Ing. Dr. rer. nat. Kurt Reinschke, meinem langjährigen Betreuer, der in den letzten Jahren sehr viel Geduld mit mir bewies, mich jederzeit unterstützte und immer wieder neu ermunterte, diese Arbeit zu einem erfolgreichen Abschluss zu führen. Für das entgegengebrachte Vertrauen, das mir vermittelte Wissen und die intensive Betreuung möchte ich ihm herzlichst danken.

Recht herzlich danken möchte ich auch Herrn Prof. Dr.-Ing. Michael Beitelschmidt für die Anfertigung des zweiten Gutachtens. Darüber hinaus gab er mir viele hilfreiche Ratschläge und unterstützte mich in praktischer Hinsicht bei meiner Arbeit durch den von ihm gewährten Zugang zu seinen Rechnerkabinetten und die mir ermöglichte Teilnahme am Instituts- und Doktorandenkolloquium.

Entstanden ist diese Dissertation während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Fraunhofer-Institut für Integrierte Schaltungen, am Institutsteil für Entwurfsautomatisierung in Dresden. Nach meiner Diplomarbeit wurde ich hier in sehr freundlicher Atmosphäre durch Herrn Prof. Dr.-Ing. Günther Elst und Herrn Dr.-Ing. habil. Peter Schwarz aufgenommen, wofür ich ihnen hiermit herzlich danken möchte. Bedanken möchte ich mich aber auch bei ihren Nachfolgern, Herrn Dr.-Ing. Peter Schneider und Herrn Dr.-Ing. Andreas Wilde, für das entgegengebrachte Interesse und die fortwährende Unterstützung sowie bei meinem Gruppenleiter, Herrn Dr. Olaf Enge-Rosenblatt, dass er mir in all den Jahren den Rücken stärkte und die nötigen Freiräume schuf. In dieser Zeit standen mir auch zahlreiche weitere Kollegen in ganz vielfältiger Weise zur Seite und zeigten reges Interesse an meiner Arbeit. Ihnen allen gilt mein großer Dank.

Ganz wesentlich trug mein sehr geschätzter Kollege Herr Dr.-Ing. Matthias Franke zum erfolgreichen Abschluss dieser Arbeit bei. In unseren unzähligen Diskussionen erhielt ich durch sein tiefes mathematisches und regelungstechnisches Verständnis ganz neue Einsichten und kritische Denkanstöße, die mich schließlich immer bei der Arbeit voran brachten. Hierfür, aber auch für die persönliche Unterstützung und Motivation möchte ich ihm herzlichst danken.

Meinen regelungstechnischen Horizont konnte ich auch durch die vielen offiziellen und inoffiziellen Seminare sowie die gemeinsamen Mittagsrunden mit den Mitarbeitern des Instituts für Regelungs- und Steuerungstheorie an der TU Dresden stetig weiten. Ihnen allen sei an dieser Stelle herzlich gedankt.

Die Voraussetzung für den erfolgreichen Abschluss meiner Arbeit legten vor vielen Jahren meine lieben Eltern, die mich vom ersten Tag an förderten und bis heute liebevoll unterstützen. Sie ermöglichten mir meinen Schulabschluss und mein späteres Studium der Elektrotechnik und legten damit den Grundstein für die hier vorliegende Arbeit. Dafür möchte ich ihnen von Herzen danken.

Ebenso dankbar bin ich meinen Geschwistern und Freunden, die immer für mich da waren und für den notwendigen Ausgleich sorgten. Obwohl sie mich allzu oft in den letzten Jahren entbehren mussten, standen sie immer zu mir und gaben mir innerlichen Rückhalt.

Zu guter Letzt möchte ich Frau Mag. Barbara Zalesky und Herrn Dr.-Ing. Torsten Knüppel danken, die mir beim Durchsehen dieser Arbeit nach größeren und kleineren Fehlern eine sehr große Hilfe waren.

Dresden, im November 2015

Tobias Zaiczek

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung	1
2. Modellierung der Starrkörperbewegung	7
2.1. Das Modell des Starrkörpers	7
2.1.1. Kinematik des Starrkörpers	7
2.1.2. Bewegungsgleichungen des ungebundenen Starrkörpers	11
2.1.3. Bindungen zwischen Starrkörpern	15
2.2. Einführung in die Motorrechnung nach Richard von Mises	16
2.2.1. Motivation: Betrachtung der Starrkörperbewegung	16
2.2.2. Definition und Eigenschaften	17
2.2.3. Motoralgebra	20
2.2.4. Anwendung der Motorrechnung	35
3. Beschreibung von Starrkörpersystemen	41
3.1. Beschreibungsgrößen für Starrkörpersysteme	42
3.1.1. Topologische Beschreibung von Starrkörpersystemen	44
3.1.2. Beschreibung der Lage und der Bewegung der Starrkörper	46
3.1.3. Kraftgrößen	49
3.2. Gelenke und Bindungen	50
3.2.1. Kinematische Beschreibung der Gelenke	50
3.2.2. Zwangskräfte in den Gelenken	52
3.2.3. Wichtige Beispiele von Bindungen und Gelenken	54
3.3. Bewegungsgleichungen für Starrkörpersysteme	62
3.3.1. Vorgehen zur Aufstellung der Bewegungsgleichungen	62
3.3.2. Starrkörpersysteme mit Baumstruktur	63
3.3.3. Starrkörpersysteme mit Zyklen	75
4. Steuerung und Regelung von Starrkörpersystemen	89
4.1. Lineare zeitinvariante Modelle	89
4.1.1. Algebraische Grundlagen	90
4.1.2. Polynomiale Beschreibung linearer zeitinvarianter Systeme	92
4.1.3. Basisgrößen linearer, zeitinvarianter Systeme	93
4.1.4. Übertragungsverhalten linearer, zeitinvarianter Systeme	94
4.2. Steuerung und Regelung von Starrkörpersystemen	95
4.2.1. Linearisierung von Starrkörpersystemen	96
4.2.2. Basisgrößen linearer, zeitinvarianter Starrkörpersysteme	102
4.2.3. Übertragungsverhalten	106
4.2.4. Trajektorienplanung und Steuerungsentwurf	107

4.2.5.	Charakteristisches Polynom des geschlossenen Regelkreises (CLCP) und Reglerentwurf	112
4.3.	Zustandsraummethoden	117
4.3.1.	Zustandsdarstellung linearer Starrkörpersysteme	118
4.3.2.	Reglerentwurf durch statische Zustandsrückführung	119
4.3.3.	Parameterempfindlichkeiten der Nullstellen des CLCPs	120
4.4.	Verringerung der Parameterempfindlichkeiten beim Reglerentwurf	122
4.4.1.	Freiheitsgrade beim Entwurf statischer Zustandsrückführungen	122
4.4.2.	Verringerung der Parameterempfindlichkeiten reeller Nullstellen	125
4.4.3.	Verringerung der Parameterempfindlichkeiten komplexer Nullstellen	137
5.	Zusammenfassung und Ausblick	157
A.	Mathematischer Anhang	161
A.1.	Lineare Algebra	161
A.1.1.	Rechenregeln der dreidimensionalen Vektoralgebra	161
A.1.2.	Parametrisierung von Verdrehungen durch Euler-Winkel	162
A.1.3.	Kinematische Differentialgleichung der Drehung für Euler-Winkel	163
A.1.4.	Darstellung motorischer Dyaden als Summe dyadischer Produkte	164
A.1.5.	Eigenwerte und (Rechts-)Eigenvektoren reeller Matrizen	166
A.2.	Parameterempfindlichkeiten des Manipulators aus Beispiel 4.1	169
	Symbolverzeichnis	173
	Literaturverzeichnis	179

Kapitel 1.

Einleitung

Zu den Hauptaufgaben der Steuerungs- und Regelungstechnik gehört die Bereitstellung theoretisch fundierter Methoden und praktisch anwendbarer Werkzeuge, die die gezielte Beeinflussung technischer Prozesse erlauben. Eine wesentliche Voraussetzung für den Entwurf von Steuerungen und Regelungen ist die möglichst genaue Kenntnis des dynamischen Verhaltens des zu beeinflussenden Prozesses. Die dafür notwendige Beschreibung des Systemverhaltens in Form eines mathematischen Modells muss den Genauigkeitsanforderungen an die zu lösende Aufgabe angepasst sein und aus einem geeigneten physikalischen Modell des zu untersuchenden Prozesses hervorgehen.

Ein traditionell großes Anwendungsgebiet der Steuerungs- und Regelungstechnik ist die gezielte Beeinflussung mechanischer Systeme. Oftmals liefern Starrkörpersysteme eine brauchbare physikalische Beschreibung derartiger Systeme. Charakteristisch für die Modellierung eines gegebenen Systems durch ein Starrkörpersystem ist, dass alle in der Realität auftretenden Verformungen der Körper vernachlässigt werden. Seit Mitte der 1960er Jahre wurden für diese Modelle eine Reihe effektiver Methoden zur rechnergestützten Aufstellung und Lösung der zugehörigen Modellgleichungen entwickelt. Die dabei verwendeten Modellierungsansätze finden sich heute in einer Reihe von Fachbüchern wieder¹. Mit Ausnahme von [Fea08] basieren die gängigen Lehrwerke auf den dem Ingenieur vertrauten Mitteln der Matrizenrechnung. Das hingegen bereits 1924 von R. VON MISES eingeführte Konzept der *Motorrechnung* [vM24a, vM24b] fand in den bisherigen Darstellungen keine Anwendung. Dies ist umso mehr verwunderlich, als die Werkzeuge der Motorrechnung eine sehr prägnante und übersichtliche Beschreibung der Starrkörpermechanik erlauben, in der die Bewegungsgleichungen des Starrkörpers in der gleichen Struktur erscheinen wie die Bewegungsgleichungen des Massenpunktes mit den Hilfsmitteln der Vektorrechnung. Neben den bereits aus der Vektoralgebra bekannten Vorteilen einer koordinatenfreien Beschreibung ermöglicht es die Motorrechnung überdies, sich von der Festlegung eines konkreten Bezugspunktes zu lösen. Die resultierenden Beziehungen werden dadurch kompakter und leichter verständlich.

Ein Ziel dieser Arbeit ist es daher, die Modellgleichungen allgemeiner Starrkörpersysteme auf der Grundlage der von R. VON MISES eingeführten Motorrechnung neu zu diskutieren, übersichtlich darzustellen und die zugehörigen Bewegungsgleichungen abzuleiten. Die daraus hervorgehenden mathematischen Modelle erscheinen im Allgemeinen in der Form von Algebrodifferentialgleichungssystemen, in denen sowohl algebraische Gleichungen als auch gewöhnliche Differentialgleichungen auftreten.

¹Siehe hierzu beispielsweise [Wit77, RS88, Hau89, Ang97, Woe11, SE14].

Eine spezielle Klasse derartiger Modelle lässt sich unter dem Begriff linearer, kontinuierlicher, zeitinvarianter Systeme (kurz *LTI-Systeme*²) zusammenfassen und sich mathematisch im Bildbereich durch polynomiale Gleichungen in der LAPLACE-Variable s charakterisieren. Aufgrund ihrer besonderen Struktur existieren für diese Klasse vielfältige Entwurfs- und Analyseverfahren³. Unter gewissen Voraussetzungen an die systembeschreibenden Polynommatrizen lassen sich für LTI-Systeme auf systematische Weise Basisgrößen derart konstruieren, dass sie für den Entwurf von Steuerungen und Trajektorienfolgeregelungen besonders geeignet sind. Das hierzu in [Rei14] vorgeschlagene Verfahren wird in dieser Arbeit anhand des linearisierten Modells eines Manipulators mit vier Freiheitsgraden und zwei Stellgrößen erprobt. Diskutiert werden an diesem Beispiel neben der Konstruktion zweckmäßiger Basisgrößen auch das Vorgehen zur Planung geeigneter Trajektorien und zum Entwurf der dazu erforderlichen Steuerungen.

Aufgrund nicht modellierter Effekte – seien es beispielsweise elastische Verformungen an den Körpern oder mathematisch schwer fassbare Reibeffekte – und unvermeidbarer Modellunbestimmtheiten – die sich u. a. auf Fertigungstoleranzen, Alterungs- und Verschleißvorgänge oder eine endliche Genauigkeit bei der Parameteridentifikation zurückführen lassen – wird sich das zu beeinflussende System bei der praktischen Umsetzung der zuvor entworfenen Steuerung im Allgemeinen anders verhalten, als es während der Trajektorienplanung vorgesehen war. In der Praxis ist es daher notwendig, die Steuerung durch eine Regelung zu ergänzen, deren Aufgabe es ist, alle auftretenden Abweichungen zu erfassen und bestmöglich auszugleichen. Aus den vielen Möglichkeiten, einen solchen Regler zu entwerfen, wird in der vorliegenden Arbeit eine aus theoretischer Sicht interessante Variante herausgegriffen, bei der die Nullstellen des charakteristischen Polynoms des geschlossenen Regelkreises (kurz CLCP⁴) an beliebig gewählten Stellen der komplexen Ebene platziert werden. Verfügt das zu beeinflussende System über mehr als eine Stellgröße, so ist die Vorgabe der Nullstellen unter gewissen Voraussetzungen durch eine Vielzahl von Reglern realisierbar. In dieser Arbeit wird zunächst gezeigt, wie sich in diesem Fall ein geeigneter Regler nach dem empfohlenen Vorgehen in [Rei14] mit den Mitteln der linearen Algebra berechnen lässt. Illustriert und simulativ erprobt wird die dargestellte Methodik an dem zuvor betrachteten Beispiel des Manipulators.

Die vorhandenen Freiheiten beim Reglerentwurf durch die Vorgabe von Nullstellen des CLCPs lassen sich bei linearen Mehrgrößensystemen auf vielfältige Weise nutzen. Bereits 1985 wurde ein Verfahren veröffentlicht [KNV85], das für die spezielle Klasse linearer, zeitinvarianter Zustandssysteme beim Entwurf konstanter Zustandsrückführungen die Freiheiten dazu nutzt, die Robustheit der per Nullstellenplatzierung entworfenen Regler gegenüber Parameterschwankungen in den Einträgen der Systemmatrizen iterativ zu erhöhen. Dieses Verfahren findet bis heute in kommerziellen Softwarewerkzeugen Anwendung, wie beispielsweise der Control System Toolbox in Matlab [TMW15]. In der vorliegenden Arbeit soll dieser Ansatz, speziell für die Vorgabe komplexer Nullstellen, anhand verschiedener akademischer Beispiele näher untersucht und weiter entwickelt werden. Ergänzt werden die durchgeführten Untersuchungen durch eine Simulationsstudie an dem zuvor betrachteten Beispiel des Manipulators, in der die Regelgüte des ursprünglichen Reglers mit der des nach dem vorgestellten Verfahren bearbeiteten Reglers verglichen wird.

²Abgeleitet von der englischen Bezeichnung „linear time-invariant system“.

³Siehe beispielsweise [Lun10a, Lun10b, Lud95a, Lud95b, Föl94, Rei05].

⁴Die Abkürzung entstammt der englischsprachigen Bezeichnung „closed-loop characteristic polynomial“.

Gliederung der Arbeit

Die Arbeit gliedert sich im Wesentlichen in zwei Teile. Der erste Teil beschäftigt sich mit der Modellierung und Simulation von Starrkörpersystemen auf der Grundlage der VON MISESSchen Motoralgebra. Hierzu folgt dieser Einleitung im zweiten Kapitel zunächst die Definition wesentlicher Begriffe der Starrkörpermechanik. Alle hierin dargestellten Zusammenhänge dienen der Motivation der im Anschluss detailliert eingeführten Motorrechnung. Die darin zu findenden Definitionen stellen, im Unterschied zu der klassischen Einführung durch RICHARD VON MISES, den Feldcharakter der Motoren in den Vordergrund der Betrachtung und erweitern die Theorie um Motormatrizen, mit denen sich die Notation in den folgenden Kapiteln erheblich vereinfacht. Neben den erwähnten Definitionen findet der Leser hier auch diverse Rechenregeln, die mitunter an jene der Vektoralgebra erinnern, sowie verschiedene Beispiele, die den Umgang mit der Motorrechnung erleichtern sollen.

Die damit erworbenen Kenntnisse zur Motorrechnung werden in Kapitel 3 auf Starrkörpersysteme angewandt. Nach einer kurzen Diskussion bisher in der Literatur üblicher Beschreibungsweisen erfolgt die Einführung aller zur Charakterisierung der Lage, der Bewegung und der Kraftwirkung notwendigen Größen. Die in den Gelenken vorherrschenden kinematischen Zwangsbedingungen werden durch matrixwertige Gleichungen in den eingeführten Motoren ausgedrückt und für unterschiedliche, in der Praxis häufig anzutreffende Gelenktypen beispielhaft angegeben. Zum Abschluss dieses Kapitels werden die Bewegungsgleichungen für Starrkörpersysteme mit und ohne geschlossene kinematische Ketten allgemein abgeleitet und das Vorgehen an anschaulichen Beispielen erläutert.

Im zweiten Teil dieser Arbeit werden aufbauend auf den bis dahin betrachteten Modellen Konzepte für deren Steuerung und Regelung diskutiert. Dabei beschränkt sich das Kapitel im Wesentlichen auf lineare Methoden für den Entwurf der Steuerungen und Regelungen. Der erste Abschnitt ist daher der Einführung in allgemeine Beschreibungsweisen von LTI-Systemen sowie deren Steuerungsentwurf gewidmet. Darauf folgend werden im zweiten Abschnitt Wege aufgezeigt, diese Theorie auf die zuvor behandelten Starrkörpersysteme anzuwenden. Im Mittelpunkt stehen die Trajektorienplanung und der Steuerungsentwurf auf der Grundlage von Basisgrößen sowie der Reglerentwurf durch Vorgabe von Nullstellen des CLCPs für LTI-Systeme mit mehreren unabhängigen Eingangsgrößen. In den beiden letzten Abschnitten dieses vierten Kapitels wird der Reglerentwurf für LTI-Systeme betrachtet, die sich in Zustandsform darstellen lassen. Auch hier erfolgt die Berechnung einer statischen Zustandsrückführung durch die Vorgabe der Nullstellen des CLCPs. Dabei werden zu Beginn die Freiheiten diskutiert, die bei der Wahl der Rückführverstärkungen auftreten. Anschließend wird ein Algorithmus dargestellt, der bei Vorgabe ausschließlich reeller Nullstellen die Robustheit gegenüber Änderungen der Systemmatrizen steigert. Dieses Verfahren wird im darauf folgenden Abschnitt aufgegriffen und auf den Fall komplexer Nullstellen erweitert. Anhand diverser akademischer Beispiele und einer praxisnahen Anwendung wird gezeigt, dass das Verfahren in vielen Fällen vorteilhaft eingesetzt werden kann. Den Abschluss dieser Arbeit bildet eine Zusammenfassung und ein Ausblick auf mögliche Erweiterungen und offen gebliebene Fragestellungen.

Verwendete Notation und Symbolik

Durch die verwendete Symbolik wird in dieser Arbeit streng zwischen den zunächst abstrakten, algebraischen Objekten, wie den Vektoren des dreidimensionalen Anschauungsraumes, den später eingeführten Motoren und deren Dyaden, und den zugehörigen Koordinatendarstellungen in Form von Matrizen unterschieden. Tabelle 1.1 gibt einen Überblick über die gewählten Schriftarten zur Kennzeichnung unterschiedlicher algebraischer Objekte. Um die Formulierungen kurz zu halten, wird sprachlich nicht zwischen den Vektoren und deren Koordinatendarstellung unterschieden, falls durch die Symbolik oder den Sinnzusammenhang Missverständnisse ausgeschlossen sind. Dabei werden sowohl der Vektor als auch die Spaltenmatrix seiner Koordinaten als Vektoren bezeichnet.

Über die Einführung einer Basis des zugehörigen Vektorraums erhält man aus den algebraischen Objekten ihre eindeutig festgelegten Koordinaten. Diese Operation wird in den folgenden Kapiteln durch eckige Klammern oder einen senkrechten Strich gekennzeichnet, an dem die Basis (ggf. in Form eines Koordinatensystems) tiefgestellt angetragen wird. Beispielsweise sind die Koordinaten des Vektors \vec{v} bezüglich der Basis \mathcal{B} durch den Koordinatenvektor

$$\mathbf{v} = \vec{v}|_{\mathcal{B}} = [\vec{v}]_{\mathcal{B}}$$

gegeben. Bei der Darstellung der Operationen wird ebenfalls zwischen der Matrizenrechnung und der Rechnung mit anderen algebraischen Objekten unterschieden. Beispielsweise wird die Anwendung einer Dyade auf einen Vektor durch einen Punkt zwischen den Operanden gekennzeichnet, die Multiplikation von Matrizen hingegen ohne Trennzeichen geschrieben. Einen Überblick über spezielle eingeführte Operationen gibt Tabelle 1.2.

Im Hinblick auf die Konstruktion geeigneter Teilmatrizen werden in dieser Arbeit verschiedene Schreibweisen genutzt. So kann eine Teilmatrix dadurch spezifiziert werden, dass alle zu verwendenden Spalten- und Zeilenindizes der ursprünglichen Matrix hinter ihr angegeben werden. Alternativ können auch die zu streichenden Zeilen und Spalten direkt hinter der Matrix angegeben werden, indem die entsprechenden Indizes in durchgestrichener Schrift notiert werden. In beiden Varianten werden die Spaltenindizes jeweils unten, die Zeilenindizes oben angetragen. Beispielsweise erhält man aus

$$\mathbf{M}_{234}^{24} \quad \text{und} \quad \mathbf{M}_{\bar{1}}^{\bar{1}\bar{3}}$$

mit $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{(4 \times 4)}$ jeweils die Matrix des Typs $(2, 3)$, die aus den letzten drei Spalten und der zweiten und vierten Zeile der Matrix \mathbf{M} besteht.

Speziell in den Kapiteln 2 und 3 ist es notwendig, bei vielen auftretenden Größen zu unterscheiden, ob sie sich auf ein ruhendes oder ein bewegtes Koordinatensystem beziehen. Erstere Größen werden daher in dieser Arbeit durchgängig durch einen Unterstrich gekennzeichnet, letztere ohne Unterstrich notiert. In allen Beispielen dieser Arbeit wurden die auftretenden physikalischen Größen auf geeignet gewählte Werte normiert, sodass einheitenlos gerechnet werden kann. Für die graphischen Darstellungen in dieser Arbeit gilt: Doppelpfeile symbolisieren Motoren. Kraftgrößen (Kräfte, Drehkräfte, Kraftmotoren, ...) werden durch nicht gefüllte Pfeilspitzen gekennzeichnet, geometrische oder kinematische Größen durch ausgefüllte Pfeilspitzen. Eine Liste wichtiger und in dieser Arbeit durchgängig benutzter Symbole findet sich im Anhang auf Seite 173.

a ... Kursivdruck:	skalare Größen
\vec{a} ... Kursivschrift mit Vektorpfeil:	Vektoren des Anschauungsraumes
\mathbf{a} ... Fettdruck (Kleinbuchstaben):	Tupel und einspaltige Matrizen (Vektoren)
\mathbf{A} ... Fettdruck (Großbuchstaben):	Matrizen und Vektoren im Bildbereich der LAPLACE-Transformation
\mathbf{A}_P ... Fettdruck mit Index P:	Polynommatrizen / -vektoren
\mathfrak{a} ... Frakturschrift (Kleinbuchstaben):	Motoren
\mathfrak{A} ... Frakturschrift (Großbuchstaben):	Motordyaden
\mathfrak{A} ... fette Frakturschrift (Großbuchstaben):	Motormatrizen
\mathcal{A} ... Kalligrafische Schrift:	Mengen, Vektordyaden, Koordinatensysteme
\mathbb{A} ... Zeichen mit Doppelstrich:	Zahlenmengen

Tabelle 1.1.: Mathematische Schriftarten

$\widetilde{()}$:	Kreuzproduktmatrix oder -dyade / Dyade des motorischen Produkts
$\widetilde{()}$:	Abweichungen um Linearisierungspunkt (nur in Abschnitt 4.2.1)
$()^T$:	Transponierte einer Matrix / einer Dyade
$()^*$:	konjugiert-komplexe Zahl / Matrix / Dyade
$()^H$:	konjugiert-komplexe, transponierte Matrix / Dyade
$() _P$:	Komponenten eines Motors bezüglich des Bezugspunktes P
$() _{\mathcal{F}}$:	Komponenten eines Vektors / Motors bezüglich des Koordinatensystems \mathcal{F}
$()^{(j)}$:	j -te Zeitableitung
$\text{adj}()$:	Matrix der Adjunkten (Adjunktenmatrix)
$\text{im}()$:	Bild einer Matrix (auch Spaltenraum genannt)
$\text{Re}()$:	Realteil einer komplexen Zahl / Matrix
$\text{Im}()$:	Imaginärteil einer komplexen Zahl / Matrix
$\dot{()}$, $\ddot{()}$:	erste und zweite Ableitung nach der Zeit (bezüglich eines Inertialsystems)
$\overset{\circ}{()}$, $\overset{\circ\circ}{()}$, $\overset{\circ}{()}$, $\overset{\circ\circ}{()}$:	erste und zweite Ableitung nach der Zeit bezüglich verschiedener bewegter Koordinatensysteme
$()()$:	Multiplikation mit einem Skalar / Matrizenmultiplikation
$() \cdot ()$:	skalares Produkt, Skalarprodukt oder Anwendung einer Dyade
$() \times ()$:	Kreuzprodukt oder motorisches Produkt
$() \otimes ()$:	dyadisches Produkt
$[(), ()]$:	LIE-Klammer zweier Vektorfelder

Tabelle 1.2.: Ausgewählte mathematische Operationen: „ $()$ “ symbolisiert die Operanden

Kapitel 2.

Modellierung der Starrkörperbewegung

In den nachstehenden Abschnitten werden zunächst wesentliche Begriffe der Starrkörpermechanik eingeführt, die das Verständnis späterer Kapitel erleichtern sollen. Daran schließt sich in Abschnitt 2.2 eine detaillierte Einführung in die Motorrechnung nach RICHARD VON MISES an. Das bereits 1924 veröffentlichte Konzept der Motorrechnung [vM24a, vM24b] wird darin so aufgearbeitet, dass es dem Leser in den nachfolgenden Kapiteln als vertrautes Werkzeug zur Verfügung steht. Die am Ende dieses Abschnitts mithilfe der Motorrechnung angegebenen Bewegungsgleichungen des Starrkörpers bilden schließlich den Grundbaustein der im folgenden Kapitel diskutierten Starrkörpersysteme.

2.1. Das Modell des Starrkörpers

Als *Starrkörper* bezeichnet man in der Mechanik ein Modell eines mechanischen Körpers, bei dem angenommen wird, dass die geometrische Form bei der Bewegung im Raum unverändert bleibt. Die resultierenden inneren Bindungen lassen sich sämtlich als geometrische Zwangsbedingungen formulieren, und zwar derart, dass der Abstand beliebiger Punkte des Körpers für alle Zeiten t unverändert bleibt.

Beginnend mit der geometrischen Betrachtung einer Starrkörperkonfiguration werden in Abschnitt 2.1.1 alle notwendigen kinematischen Zusammenhänge für die Beschreibung der Starrkörperbewegung erläutert. Darauf aufbauend werden in Abschnitt 2.1.2 die Bewegungsgleichungen des ungebundenen Starrkörpers¹ abgeleitet. Abschnitt 2.1.3 gibt schließlich einen Überblick über verschiedene Bindungsarten, die zwischen Starrkörpern auftreten können.

2.1.1. Kinematik des Starrkörpers

Die Lage und die Bewegung aller materiellen Punkte eines Starrkörpers im Raum können jeweils durch minimal sechs Größen beschrieben werden [KS14, Ham49]. Ein Starrkörper besitzt damit einen Lagefreiheitsgrad von sechs und verfügt im dreidimensionalen Raum über ebenso viele

¹Ein Starrkörper gilt als ungebunden, wenn weder seine Lage noch seine Bewegung Zwangsbedingungen unterliegen.

Freiheitsgrade der Bewegung. Drei Freiheitsgrade lassen sich Translationen zuordnen, bei denen sich alle Punkte des Körpers auf parallelen Bahnen bewegen. Die verbleibenden drei Freiheitsgrade entsprechen Rotationen, bei denen sich alle Punkte auf konzentrischen Kreisbahnen um eine Achse drehen.

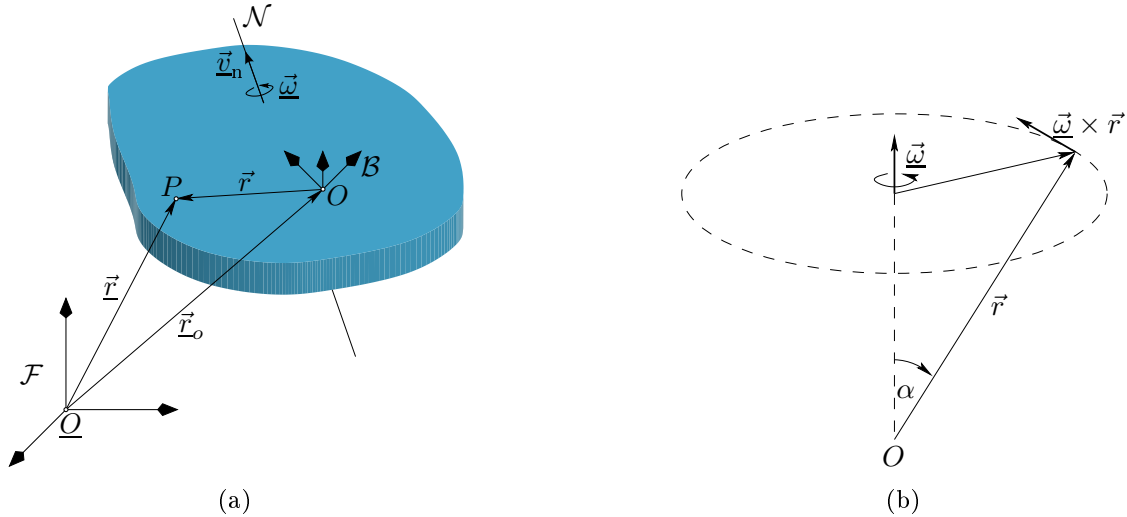


Abbildung 2.1.: Bewegung des Starrkörpers: (a) Einführung der Koordinatensysteme (b) Drehgeschwindigkeit

Häufig wird zur Beschreibung der Lage aller materiellen Punkte des Starrkörpers eine Darstellung genutzt, bei der ein willkürlich gewählter Punkt des Körpers als Bezugspunkt O herausgegriffen wird. Die Position dieses Bezugspunktes zur Zeit t lässt sich vom Ursprung \underline{O} eines Bezugskordinatensystems \mathcal{F} aus als Ortsvektor $\underline{\vec{r}}_o(t)$ angeben. Für die Beschreibung der Lage aller weiteren Punkte erweist es sich als zweckmäßig, ein zweites, fest mit dem Körper verbundenes Koordinatensystem² \mathcal{B} mit dem Ursprung in O einzuführen. Jeder beliebige materielle Punkt P des Starrkörpers lässt sich dann über die festen Koordinaten seines Ortsvektors \vec{r} vom Ursprung O des körperfesten Koordinatensystems identifizieren. Seine Lage gegenüber dem Bezugskordinatensystem \mathcal{F} berechnet sich, wie Abbildung 2.1(a) verdeutlicht, durch die Beziehung

$$\underline{\vec{r}} = \underline{\vec{r}}_o + \vec{r}, \quad (2.1)$$

wobei \vec{r} in \mathcal{B} konstant ist³. Um die Beschreibung so einfach wie möglich zu gestalten, dienen als Bezugskordinatensystem \mathcal{F} und als körperfestes Koordinatensystem \mathcal{B} in dieser Arbeit ausschließlich orthonormierte Rechtssysteme. Somit ist die Lage eines beliebigen Punktes P und damit des gesamten Starrkörpers gegenüber einem Bezugskordinatensystem \mathcal{F} eindeutig durch die Position des Bezugspunktes O und die Verdrehung des körperfesten Koordinatensystems gegenüber dem Bezugskordinatensystem bestimmt.

²Von der englischen Bezeichnung ‘Body Frame’ herrührend.

³Hierbei wird folgende Konvention eingeführt: alle Ortsvektoren des Bezugskordinatensystems werden nachfolgend mit Unterstrich notiert, alle Ortsvektoren des körperfesten Koordinatensystems ohne Unterstrich.

Verdrehung von Koordinatensystemen Die Verdrehung zweier orthonormierter Koordinatensysteme (gleicher Orientierung) lässt sich durch eine lineare Transformation \mathcal{R} zwischen den zugehörigen Basisvektoren der zwei Koordinatensysteme beschreiben [KS14]. Diese Transformation kann als linearer, orthogonaler Operator \mathcal{R} aufgefasst werden, der über seine Wirkung auf Vektoren beschrieben wird [Lag56]. Eine Darstellung des Operators \mathcal{R} bezüglich eines orthonormierten Koordinatensystems liefert eine orthogonale (3×3) -Matrix \mathbf{R} mit der Eigenschaft $\det \mathbf{R} = 1$, die auch als *Drehmatrix* oder *Richtungskosinusmatrix* bezeichnet wird. Werden die Basisvektoren des verdrehten Koordinatensystems als Koordinaten im ursprünglichen Koordinatensystem angegeben und zu einer Matrix spaltenweise zusammengefasst, so erhält man die Basisdarstellung des Drehoperators \mathcal{R} sowohl bezüglich des ursprünglichen als auch des verdrehten Koordinatensystems.

Neben der Verdrehung von einzelnen Vektoren oder des vollständigen Koordinatensystems leistet die Transformation auch die Umrechnung der Koordinaten eines Vektors \vec{h} , von der Darstellung $\vec{h}|_{\mathcal{F}_2}$ im verdrehten Koordinatensystem zur Darstellung $\vec{h}|_{\mathcal{F}_1}$ im ursprünglichen Koordinatensystem. Die Transformation der Koordinaten zwischen den Koordinatensystemen erfolgt dabei *kontragredient*⁴ zur Transformation der Koordinatensysteme :

$$\vec{h}|_{\mathcal{F}_1} = \mathcal{R} \cdot \vec{h}|_{\mathcal{F}_2} \quad \text{bzw.} \quad \vec{h}|_{\mathcal{F}_2} = \mathcal{R}^T \cdot \vec{h}|_{\mathcal{F}_1}.$$

Die Gesamtheit aller Drehoperatoren bildet zusammen mit der Verknüpfung zweier Drehoperatoren die *spezielle orthogonale Gruppe* $SO(3)$. Jedes Element dieser Gruppe lässt sich durch minimal drei Parameter eindeutig charakterisieren. Jede Parametrisierung von \mathcal{R} mit nur drei Parametern weist jedoch singuläre Punkte auf. Zur Vermeidung dieser Singularitäten ist es notwendig, mehr als nur drei Koordinaten zur Beschreibung heranzuziehen, die dann jedoch Zwangsbedingungen unterliegen. Wählt man beispielsweise die neun Matrixeinträge einer Koordinatendarstellung von \mathcal{R} als Parameter, so müssen diese sechs unabhängige Zwangsbedingungen erfüllen. In der Literatur (u. a. [KS14, Woe11]) finden sich verschiedene Ansätze zur Parametrisierung des Operators \mathcal{R} , wovon eine spezielle Darstellung in Anhang A.1.2 erläutert wird.

Bezieht sich die Verdrehung eines beliebigen Koordinatensystems auf das Bezugskordinatensystem \mathcal{F} , so wird die Verdrehung $\underline{\mathcal{R}}$ durch einen Unterstrich gekennzeichnet. Alle anderen Verdrehungen \mathcal{R} werden hingegen ohne Unterstrich notiert. Gleiches gilt für den Vektor \mathbf{q}_r bzw. $\underline{\mathbf{q}}_r$ von Parametern zur Charakterisierung der entsprechenden Verdrehung des Starrkörpers.

Geschwindigkeits- und Beschleunigungskinetik des Starrkörpers Die Bewegung eines Starrkörpers lässt sich gedanklich in zwei Anteile aufspalten: in die Translation des gewählten Bezugspunktes O und die Rotation um eine durch den Bezugspunkt verlaufende Achse. Die translatorische Bewegung ist durch die Bahnkurve des Bezugspunktes vollständig beschrieben. Die Raumrichtung der momentanen Drehachse, der Drehsinn und der Betrag der aktuellen Drehgeschwindigkeit werden hingegen durch den Winkelgeschwindigkeitsvektor $\underline{\omega}$ des Starrkörpers gegenüber dem Bezugssystem \mathcal{F} beschrieben. Bei verschwindender translatorischer Bewegung bewegt sich jeder körperfeste Punkt mit dem Ortsvektor \vec{r} jeweils auf einer Kreisbahn um die Drehachse mit der Relativgeschwindigkeit $\underline{\omega} \times \vec{r}$ zum Bezugspunkt O (vergleiche Abbildung 2.1(b)). Für eine aus Translation und Rotation bestehende Gesamtbewegung lassen sich die Geschwindigkeiten

⁴Vergleiche hierzu [Lag56].

der einzelnen Bewegungsanteile nach den Regeln der Vektoraddition zusammenfassen. Für die Geschwindigkeit und Beschleunigung eines beliebigen Punktes \vec{r} des Starrkörpers gilt folglich:

$$\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}_o + \dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}_o + \underline{\omega} \times \vec{r} \quad (2.2a)$$

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}_o + \dot{\underline{\omega}} \times \vec{r} + \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \vec{r}). \quad (2.2b)$$

Bemerkung. In obiger Gleichung wurde mit der Einführung des Drehvektors $\underline{\omega}$ stillschweigend vorausgesetzt, dass sich (infinitesimal kleine) Drehbewegungen durch Vektoren darstellen lassen. Dies ist in der Tat der Fall, denn sich überlagernde Drehbewegungen können nach den Gesetzen der Vektorrechnung addiert werden [KS14, Ham49, Som77, Gol91]. Verdrehungen von Koordinatensystemen lassen sich hingegen nicht durch Vektoren beschreiben, da die Reihenfolge zweier nacheinander ausgeführter Verdrehungen i. Allg. nicht vertauscht werden kann.

Mit den zuvor angestellten Überlegungen lässt sich schnell einsehen, dass bei der Ableitung von Vektoren immer ein Bezugskoordinatensystem mit angegeben werden muss, da sich die Ableitung bezüglich zweier verschiedener Koordinatensysteme, die sich relativ zueinander drehen, unterscheidet. Bezeichnet man die zeitliche Änderung eines beliebigen Vektors \vec{h} gegenüber dem zunächst als raumfest angenommenen Koordinatensystem \mathcal{F} mit $\frac{d^{(\mathcal{F})}\vec{h}}{dt} = \dot{\vec{h}}$ und die Änderung des gleichen Vektors gegenüber dem körperfesten Koordinatensystem \mathcal{B} mit $\frac{d^{(\mathcal{B})}\vec{h}}{dt} = \overset{\circ}{\vec{h}}$, so werden diese Größen sich um einem Term unterscheiden, der der Änderung des körperfesten Koordinatensystems gegenüber dem Bezugskoordinatensystem entspricht, nämlich $\underline{\omega} \times \vec{h}$. Für die beiden Ableitungen gilt deshalb der Zusammenhang [KS14]:

$$\dot{\vec{h}} = \overset{\circ}{\vec{h}} + \underline{\omega} \times \vec{h} \quad (2.3)$$

Kinematische Differentialgleichungen der Drehbewegung Für die vollständige Beschreibung der Bewegung fehlt bisher noch ein kinematischer Zusammenhang zwischen den zeitlichen Ableitungen der Parameter \underline{q}_r und den Koordinaten des Drehvektors $\underline{\omega}$ bezüglich eines gegebenen Koordinatensystems. Die Koordinaten des Drehvektors $\underline{\omega}$ lassen sich dabei als spezielle Wahl von Geschwindigkeitskoordinaten zur Beschreibung der Drehbewegung interpretieren und als Linearkombination der Ableitungen $\dot{\underline{q}}_r$ darstellen:

$$\underline{\omega} = \mathbf{C}_{\text{rf}}(\underline{q}_r) \dot{\underline{q}}_r. \quad (2.4)$$

Darin ist $\underline{\omega}$ die Koordinatendarstellung des Vektors $\underline{\omega}$ bezüglich eines Koordinatensystems. Im Folgenden wird stets das körperfeste Koordinatensystem \mathcal{B} zur Angabe der Koordinaten von $\underline{\omega}$ verwendet:

$$\underline{\omega} := \underline{\omega}|_{\mathcal{B}}.$$

Zur Vermeidung singulärer Punkte der Parametrisierung ist es mitunter zweckmäßig, mehr als drei Parameter in \underline{q}_r zu verwenden. Der Vektor \underline{q}_r muss dann Zwangsbedingungen erfüllen, die sich in der Form

$$\mathbf{c}_r(\underline{q}_r) = \mathbf{0} \quad (2.5)$$

angeben lassen. Einmalige Differentiation dieser Zwangsbedingungen nach der Zeit t liefert

$$\mathbf{C}_{\text{rc}}(\underline{\mathbf{q}}_r)\dot{\underline{\mathbf{q}}}_r = \mathbf{0},$$

wodurch sich Gleichung (2.4) zu der Beziehung:

$$\begin{pmatrix} \underline{\boldsymbol{\omega}} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{\text{rf}}(\underline{\mathbf{q}}_r) \\ \mathbf{C}_{\text{rc}}(\underline{\mathbf{q}}_r) \end{pmatrix} \dot{\underline{\mathbf{q}}}_r =: \mathbf{C}_r(\underline{\mathbf{q}}_r)\dot{\underline{\mathbf{q}}}_r$$

vervollständigen lässt. Sind alle notwendigen Zwangsbedingungen unabhängig voneinander, so lässt sich die Matrix \mathbf{C}_r invertieren. Mit $\mathbf{B}_r = \mathbf{C}_r^{-1}$ erhält man die gesuchte kinematische Differentialgleichung in der Form

$$\dot{\underline{\mathbf{q}}}_r = \mathbf{B}_r(\underline{\mathbf{q}}_r) \begin{pmatrix} \underline{\boldsymbol{\omega}} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = \mathbf{B}_{\text{rf}}(\underline{\mathbf{q}}_r)\underline{\boldsymbol{\omega}}, \quad (2.6)$$

wobei die Matrix $\mathbf{B}_{\text{rf}}(\underline{\mathbf{q}}_r)$ aus den ersten drei Spalten der Matrix \mathbf{B}_r besteht. Die konkrete Darstellung der Matrix $\mathbf{B}_{\text{rf}}(\underline{\mathbf{q}}_r)$ ist für eine spezielle Parametrisierung $\underline{\mathbf{q}}_r$ der rotatorischen Lage in Anhang A.1.3 angegeben.

2.1.2. Bewegungsgleichungen des ungebundenen Starrkörpers

Bei der Ableitung der Bewegungsgleichungen ist die Wahl des Bezugskordinatensystems von fundamentaler Bedeutung. In den folgenden Darstellungen wird daher davon ausgegangen, dass unter allen möglichen Koordinatensystemen auch solche existieren, in denen die bekannten Prinzipien der klassischen Mechanik⁵ gelten. Diese Koordinatensysteme werden als *Inertialkoordinatensysteme* oder kurz *Inertialsysteme* bezeichnet. Als Bezugskordinatensystem wird für den Rest dieser Arbeit, falls nicht explizit anders angegeben, ein Inertialsystem \mathcal{J} gewählt.

Die Bewegungsgleichungen des ungebundenen Starrkörpers können auf verschiedene Weisen abgeleitet werden [Som77, BP92, GH13]. Die einfachste und effizienteste Methode geht von den Impulserhaltungssätzen aus. Durch Einsetzen der entsprechenden Definitionen für den Impuls und Drehimpuls lassen sich auf sehr elegante Weise die NEWTON-EULER-Gleichungen ableiten. Deshalb soll dieser Weg auch hier besritten werden.

Impuls und Drehimpuls des Starrkörpers Für die Ableitung werden zunächst die vektoriellen Größen des Impulses und Drehimpulses allgemein eingeführt. Der *Impuls* eines mechanischen Systems ist definiert als

$$\vec{p} := \int \dot{\vec{r}} dm,$$

wobei sich das Integral, wie auch alle weiteren Integrale dieses Abschnitts, über alle materiellen Punkte des Körpers erstreckt. Durch Einsetzen des kinematischen Zusammenhangs (2.2a) und

⁵Die entsprechenden Prinzipien finden sich in vielen einschlägigen Einführungen zur klassischen Mechanik [Ham49, Gol91, Bre83].

Auswerten der entstehenden Integrale erhält man schließlich eine Gleichung für den Impuls in den Bewegungsgrößen $\dot{\underline{r}}_o$ und $\underline{\omega}$ des Starrkörpers:

$$\vec{p} = \int (\dot{\underline{r}}_o + \underline{\omega} \times \vec{r}) dm = m\dot{\underline{r}}_o + m\underline{\omega} \times \vec{r}_s. \quad (2.7)$$

Dabei bezeichnet m die Masse des Starrkörpers und \vec{r}_s den Ortsvektor seines Massenmittelpunktes (MMP) vom Ursprung des körperfesten Koordinatensystems \mathcal{B} . Berechnen lassen sich beide Größen durch die Beziehungen

$$m := \int dm \quad \text{und} \quad m\vec{r}_s := \int \vec{r} dm.$$

Als *Drehimpuls*⁶ eines Körpers bezogen auf den Ursprung des körperfesten Koordinatensystems O bezeichnet man den Vektor

$$\vec{l}_o := \int \vec{r} \times \dot{\underline{r}} dm.$$

Unter Berücksichtigung der Beziehungen (2.2a) und (A.7) kann für den Drehimpuls des Starrkörpers ebenfalls eine Gleichung in den Bewegungsgrößen $\dot{\underline{r}}_o$ und $\underline{\omega}$ hergeleitet werden:

$$\begin{aligned} \vec{l}_o &= \int [\vec{r} \times (\dot{\underline{r}}_o + \underline{\omega} \times \vec{r})] dm = m\vec{r}_s \times \dot{\underline{r}}_o + \int [\vec{r} \times (\underline{\omega} \times \vec{r})] dm \\ \vec{l}_o &= m\vec{r}_s \times \dot{\underline{r}}_o + \int [(\vec{r} \cdot \vec{r})\underline{\omega} - \vec{r}(\vec{r} \cdot \underline{\omega})] dm = m\vec{r}_s \times \dot{\underline{r}}_o + \int [\mathcal{I}(\vec{r} \cdot \vec{r}) - \vec{r} \otimes \vec{r}] \cdot \underline{\omega} dm \\ \vec{l}_o &= m\vec{r}_s \times \dot{\underline{r}}_o + \int [\mathcal{I}(\vec{r} \cdot \vec{r}) - \vec{r} \otimes \vec{r}] dm \cdot \underline{\omega} = m\vec{r}_s \times \dot{\underline{r}}_o + \mathcal{M}_o \underline{\omega}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Darin bezeichnet \mathcal{I} die (vektorielle) Einheitsdyade, $\vec{r} \otimes \vec{r}$ das dyadische Produkt des Vektors \vec{r} mit sich selbst und \mathcal{M}_o die auf den Punkt O bezogene *Trägheitsdyade* des Starrkörpers. Wird der Drehimpuls auf den Ursprung \underline{O} des Inertialsystems bezogen, so spricht man auch vom *äußeren Drehimpuls*

$$\vec{l}_o := \int (\vec{r} \times \dot{\underline{r}}) dm,$$

der sich mit den Gleichungen (2.1) und (2.7) aus dem Drehimpuls bezogen auf den Punkt O berechnen lässt:

$$\vec{l}_o = \vec{l}_o + \vec{r}_o \times \vec{p}. \quad (2.9)$$

Resultierende Kräfte und Drehkräfte Für die Modellierung äußerer Einflüsse wird angenommen, dass auf das Innere und den Rand des Starrkörpers äußere Kraftfelder und ggf. Drehkraftfelder wirken, die sich über alle materiellen Punkte des Körpers summieren lassen:

$$\vec{f}^a := \int d\vec{f}^a, \quad \vec{d}^a := \int \vec{r} \times d\vec{f}^a + \int dd^a.$$

Es ergeben sich dabei die (*resultierende*) *äußere Kraft* \vec{f}^a und die (*resultierende*) *äußere Drehkraft* \vec{d}^a bezogen auf den Punkt O . Die resultierende äußere Drehkraft kann auch auf den Ursprung des Inertialkoordinatensystems bezogen werden. Man erhält so

$$\vec{d}_o^a := \int \vec{r} \times d\vec{f}^a + \int dd^a = \vec{r}_o \times \left(\int d\vec{f}^a \right) + \int \vec{r} \times d\vec{f}^a + \int dd^a = \vec{r}_o \times \vec{f}^a + \vec{d}_o^a. \quad (2.10)$$

⁶Der Drehimpuls wird mitunter in der Literatur abweichend definiert. Siehe hierzu u. a. [RS88].

Impulserhaltungssätze und Bewegungsgleichungen des Starrkörpers Nach dem Impulserhaltungssatz gleicht die zeitliche Ableitung des Impulses zu jeder Zeit der resultierenden äußeren Kraft am Starrkörper:

$$\dot{\vec{p}} = \vec{f}^a. \quad (2.11)$$

Addieren sich alle am Starrkörper angreifenden Kräfte vektoriell zu Null, so bleibt der Impuls des Systems unverändert.

Der Drehimpulssatz liefert eine analoge Aussage für den äußeren Drehimpuls eines Starrkörpers. Die zeitliche Änderung des Drehimpulses gleicht der resultierenden äußeren Drehkraft, sofern sowohl der Drehimpuls als auch die Drehkraft auf den gleichen Ursprung eines Inertialsystems bezogen werden:

$$\dot{\vec{l}}_o = \vec{d}_o^a. \quad (2.12a)$$

Mit den Gleichungen (2.9), (2.10) und (2.11) lässt sich auch für den Drehimpuls bezogen auf den Punkt O eine Aussage ableiten:

$$\dot{\vec{l}}_o + \dot{\vec{r}}_o \times \vec{p} = \vec{d}_o^a. \quad (2.12b)$$

Die angegebenen Impulserhaltungssätze ermöglichen bereits die Ableitung der Bewegungsgleichungen des Starrkörpers. Es erweist sich jedoch als günstig, die zeitliche Ableitung des Drehimpulses \vec{l}_o bezüglich des mitbewegten Koordinatensystems \mathcal{B} anzugeben, da in diesem System die Trägheitsdyade \mathcal{M}_o konstant ist. Aus Gleichung (2.3) ergibt sich die Beziehung

$$\dot{\vec{l}}_o + \underline{\omega} \times \vec{l}_o + \dot{\vec{r}}_o \times \vec{p} = \vec{d}_o^a.$$

Durch Einsetzen von Gleichung (2.7) und (2.8) in die Erhaltungssätze (2.11) und (2.12b) erhält man unter Ausnutzung der JACOBI-Identität (A.6) des Kreuzproduktes schließlich die (kinetischen) Bewegungsgleichungen des ungebundenen Starrkörpers:

$$\begin{pmatrix} m\mathcal{I} & m\tilde{\vec{r}}_s^T \\ m\tilde{\vec{r}}_s & \mathcal{M}_o \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{\vec{v}}_o \\ \underline{\omega} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m\underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \vec{r}_s) \\ \underline{\omega} \times (\mathcal{M}_o \cdot \underline{\omega}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{f}^a \\ \vec{d}_o^a \end{pmatrix}. \quad (2.13)$$

Dabei bezeichnet $\tilde{\vec{r}}_s$ die Kreuzprodukt dyade des Vektors \vec{r}_s (vergleiche hierzu Anhang A.1) und $\vec{v}_o := \dot{\vec{r}}_o$ die translatorische Geschwindigkeit des Bezugspunktes. Die Gleichungen (2.13) werden NEWTON-EULER-Gleichungen genannt, denn sie enthalten als Spezialfälle sowohl das NEWTONsche Grundgesetz bei verschwindender Drehbewegung in der oberen Zeile als auch die EULERSchen Kreiselgleichungen bei ruhendem Referenzpunkt in der unteren Zeile.

Kinematische Differentialgleichungen Die NEWTON-EULER-Gleichungen beschreiben die Bewegung des Starrkörpers nicht vollständig. Hinzu kommen die kinematischen Differentialgleichungen der Translation und Rotation. Als Geschwindigkeitskoordinaten dienen dabei die Koordinaten der Vektoren $\dot{\vec{r}}_o$ und $\underline{\omega}$ im körperfesten Koordinatensystem \mathcal{B} :

$$\underline{\omega}_s := \left(\dot{\vec{r}}_o|_{\mathcal{B}}^T \quad \underline{\omega}|_{\mathcal{B}}^T \right)^T =: \left(\underline{v}_o^T \quad \underline{\omega}^T \right)^T.$$

Die Parametrisierung der Lage erfolgt durch beliebige Drehparameter $\underline{\mathbf{q}}_r$ und die Koordinaten des Ortsvektors $\underline{\mathbf{r}}_o$ bezüglich des Inertialkoordinatensystems:

$$\underline{\mathbf{q}}_s = (\underline{\mathbf{r}}_o|_{\mathcal{J}}^T \quad \underline{\mathbf{q}}_r^T)^T =: (\underline{\mathbf{r}}_o^T \quad \underline{\mathbf{q}}_r^T)^T.$$

Zusammen mit den Gleichungen (2.5) und (2.6) der Drehbewegung ergeben sich dann die kinematischen Differentialgleichungen des Starrkörpers, die sich im Allgemeinen als System von Algebrodifferentialgleichungen notieren lassen, und zwar in der Form:

$$\dot{\underline{\mathbf{q}}}_s = \begin{pmatrix} \dot{\underline{\mathbf{r}}}_o \\ \dot{\underline{\mathbf{q}}}_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_{\text{rf}}(\underline{\mathbf{q}}_r) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{v}}_o \\ \underline{\boldsymbol{\omega}} \end{pmatrix} =: \mathbf{B}_{\text{sf}}(\underline{\mathbf{q}}_s) \underline{\boldsymbol{\varpi}}_s \quad (2.14a)$$

und

$$\mathbf{c}_s(\underline{\mathbf{q}}_s) = \mathbf{c}_r(\underline{\mathbf{q}}_r) = \mathbf{0}. \quad (2.14b)$$

Kinetische Energie des Starrkörpers Abschließend wird noch ein Ausdruck für die kinetische Energie eines Starrkörpers angegeben. Jedem mechanischen System lässt sich eine *kinetische Energie*

$$T := \frac{1}{2} \int \dot{\underline{\mathbf{r}}} \cdot \dot{\underline{\mathbf{r}}} dm$$

zuordnen. Durch Einsetzen der Beziehung (2.2a) kann die kinetische Energie in drei Anteile aufgeteilt werden, einen translatorischen (T_{trans}), einen rotatorischen (T_{rot}) und einen gemischten Anteil (T_w):

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \left(\int \dot{\underline{\mathbf{r}}}_o^2 dm + 2 \int \dot{\underline{\mathbf{r}}}_o \cdot (\underline{\boldsymbol{\omega}} \times \underline{\mathbf{r}}) dm + \int (\underline{\boldsymbol{\omega}} \times \underline{\mathbf{r}})^2 dm \right) \\ T &= \underbrace{\frac{1}{2} m \dot{\underline{\mathbf{r}}}_o^2}_{T_{\text{trans}}} + \underbrace{m \dot{\underline{\mathbf{r}}}_o \cdot (\underline{\boldsymbol{\omega}} \times \underline{\mathbf{r}}_s)}_{T_w} + \underbrace{\frac{1}{2} \int (\underline{\boldsymbol{\omega}} \times \underline{\mathbf{r}})^2 dm}_{T_{\text{rot}}}. \end{aligned}$$

Der Ausdruck der rotatorischen kinetischen Energie kann schließlich unter Nutzung von (A.12) weiter vereinfacht werden:

$$\begin{aligned} T_{\text{rot}} &= \frac{1}{2} \int (\underline{\boldsymbol{\omega}} \times \underline{\mathbf{r}}) \cdot (\underline{\boldsymbol{\omega}} \times \underline{\mathbf{r}}) dm = \frac{1}{2} \int ((\underline{\boldsymbol{\omega}} \cdot \underline{\boldsymbol{\omega}})(\underline{\mathbf{r}} \cdot \underline{\mathbf{r}}) - (\underline{\boldsymbol{\omega}} \cdot \underline{\mathbf{r}})(\underline{\mathbf{r}} \cdot \underline{\boldsymbol{\omega}})) dm \\ T_{\text{rot}} &= \frac{1}{2} \underline{\boldsymbol{\omega}} \cdot \int (\mathcal{I}(\underline{\mathbf{r}} \cdot \underline{\mathbf{r}}) - \underline{\mathbf{r}} \otimes \underline{\mathbf{r}}) dm \cdot \underline{\boldsymbol{\omega}} = \frac{1}{2} \underline{\boldsymbol{\omega}} \cdot \mathcal{M}_o \cdot \underline{\boldsymbol{\omega}}. \end{aligned}$$

2.1.3. Bindungen zwischen Starrkörpern

Neben inneren Bindungen, die die Lage und Bewegung der materiellen Punkte innerhalb eines Körpers beschränken, sind äußere Bindungen für das Zusammenwirken verschiedener Körper innerhalb eines mechanischen Systems von sehr großer Bedeutung. Mathematisch lassen sich alle diese Einschränkungen an die Lage oder die Bewegung der Körper als *Zwangsbedingungen* formulieren. Hierzu seien die Parameter zur Beschreibung der jeweiligen Lage aller beteiligten Körper in dem Vektor \mathbf{q} zusammengefasst.

Die auftretenden Zwangsbedingungen können bezüglich verschiedener Kriterien kategorisiert werden. *Einseitige Bindungen* zeichnen sich durch eine richtungsabhängige Beschränkung aus und lassen sich mathematisch durch eine Ungleichung der Form $c(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \leq 0$ charakterisieren. Dem gegenüber stehen *zweiseitige Bindungen*, die keine Richtungsabhängigkeit aufweisen und sich durch eine Gleichung der Form $c(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = 0$ beschreiben lassen.

Zwangsbedingungen lassen sich ferner nach ihrer Zeitabhängigkeit unterscheiden. Verändert sich eine Bindung über der Zeit, wird sie *zeitvariant* oder *rheonom*⁷ genannt. Mathematisch äußert sich eine solche Eigenschaft in einer expliziten Zeitabhängigkeit der Zwangsbedingung. Bindungen, die keiner Zeitabhängigkeit unterliegen, werden als *zeitinvariant* oder *skleronom*⁸ bezeichnet. Ein mechanisches System, das keinerlei rheonomen Zwangsbedingungen unterworfen ist, wird im Folgenden *skleronom* bzw. *zeitinvariant* genannt.

Eine weitere wichtige Unterscheidung ist die zwischen geometrischen und kinematischen Bindungen. Eine *geometrische* Bindung liegt dann vor, wenn die Zwangsbedingung ausschließlich auf Lageebene formuliert werden kann und keine Abhängigkeit von den Zeitableitungen der Lagekoordinaten \mathbf{q} beinhaltet. Sie lässt sich im Falle zweiseitiger Bindungen stets in der Form $c(\mathbf{q}, t) = 0$ angeben. Tritt in einer Zwangsbedingung eine explizite Abhängigkeit von den Zeitableitungen $\dot{\mathbf{q}}$ auf, so wird die Bindung *kinematisch* genannt. In der Mechanik sind ausschließlich kinematische Bindungen bekannt [Ham49, Gol91], bei denen die Geschwindigkeitsterme affin in den Zwangsbedingungen auftreten.

Kinematische Zwangsbedingungen lassen sich weiterhin bezüglich ihrer Integrierbarkeit unterscheiden. Diejenigen kinematischen Zwangsbedingungen, die sich durch Integration in geometrische Zwangsbedingungen überführen lassen oder für die ein integrierender Faktor existiert, werden, wie auch die geometrischen Zwangsbedingungen selbst, als *holonome*⁹ Bindungen bezeichnet. Existiert für eine kinematische Zwangsbedingung kein solcher integrierender Faktor, so wird sie *nichtholonom* genannt. Lassen sich sämtliche Zwangsbedingungen als holonome Bindungen angeben, so wird das mechanische System *holonom* genannt, andernfalls *nichtholonom*. Die Untersuchung, ob ein System mit gegebenen Zwangsbedingungen holonom ist, ist allerdings nicht trivial (siehe hierzu [Woe11]).

⁷Abgeleitet aus dem Griechischen: „rheos“ = „fließend“, „nomos“ = „Gesetz“.

⁸Ebenfalls angelehnt an das Griechische „skleros“ = „starr“ und „nomos“ = „Gesetz“.

⁹Der Ursprung des Wortes holonom liegt ebenfalls im Griechischen und bedeutet „ganz gesetzlich“.

2.2. Einführung in die Motorrechnung nach Richard von Mises

In diesem Unterkapitel wird das 1924 von RICHARD VON MISES publizierte Konzept der Motorrechnung vorgestellt, dessen Wurzeln bereits Mitte des 19. Jahrhunderts in den Anfängen der Schraubentheorie zu finden sind (vergleiche Abschnitt 3.1). Dabei wird nach einer kurzen Motivation eine algebraische Definition von Motoren vorgestellt, die im Unterschied zur klassischen Einführung [vM24a] über geometrische Objekte den Feldcharakter eines Motors hervorhebt. Auf dieser Definition aufbauend gelingt es, alle auf RICHARD VON MISES zurückgehenden Operationen konsistent einzuführen und durch eine Vielzahl von Beispielen und zusätzlichen Erläuterungen für die praktische Anwendung aufzuarbeiten. Den Abschluss dieses Unterkapitels bildet die Anwendung der eingeführten Motorrechnung zur Beschreibung der Bewegung eines ungebundenen Starrkörpers, dessen Bewegungsgleichungen die Grundlage der nachfolgenden Kapitel darstellen.

2.2.1. Motivation: Betrachtung der Starrkörperbewegung

Die Bewegung eines Körpers ist zu jedem Zeitpunkt t durch die momentane Geschwindigkeit $\dot{\vec{r}}$ aller seiner materiellen Punkte gegeben. Bei einem Starrkörper ist die Bewegung besonders einfach und durch Gleichung (2.2a) vollständig beschrieben. Erweitert man den Definitionsbereich von Gleichung (2.2a) über die Grenzen des Starrkörpers hinaus auf alle Punkte des Anschauungsraumes, so ergibt sich ein Vektorfeld über dem \mathbb{R}^3 . Charakterisieren lässt sich dieses Vektorfeld, bei Wahl eines beliebigen körperfesten Bezugspunktes O , durch zwei Vektoren: zum einen die translatorische Geschwindigkeit $\dot{\vec{r}}_0$ des mitbewegten Bezugspunktes und zum anderen den Drehvektor $\underline{\omega}$, der die Drehung des mitbewegten Bezugskoordinatensystems beschreibt. Es liegt also nahe, das Vektorfeld zur Beschreibung der Starrkörperbewegung durch zwei Vektoren zu identifizieren. Diese Beschreibung hat jedoch den Nachteil, dass von vornherein ein Bezugspunkt festgelegt werden muss, dessen konkrete Wahl keinen Einfluss auf das zu beschreibende Vektorfeld hat. Wünschenswert wäre daher eine Charakterisierung, die ohne die Festlegung eines konkreten Bezugspunktes auskommt.

Bevor eine Definition geeigneter mathematischer Objekte folgt, die dieser Anforderung gerecht werden, soll zunächst eine weitere Eigenschaft dieses Vektorfeldes erwähnt werden. Zu jedem Zeitpunkt t lassen sich für ein solches Vektorfeld Punkte finden, bei denen der Geschwindigkeitsvektor $\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}_n$ parallel zur Richtung des Drehvektors $\underline{\omega}$ verläuft. Falls der Drehvektor $\underline{\omega}$ nicht betragsmäßig verschwindet, liegen alle diese Punkte auf einer Geraden \mathcal{N} parallel zu $\underline{\omega}$. Die Bewegung des Starrkörpers lässt sich daher als Schraubung um eine zeitveränderliche Achse interpretieren. Da am Starrkörper noch weitere physikalische Größen mit ähnlichen Eigenschaften existieren, wird in den folgenden Abschnitten ein Konzept vorgestellt, das dem Charakter der Starrkörperbewegung Rechnung trägt und dadurch in die Lage versetzt, Bewegungsgleichungen in einfachster und gleichzeitig allge-

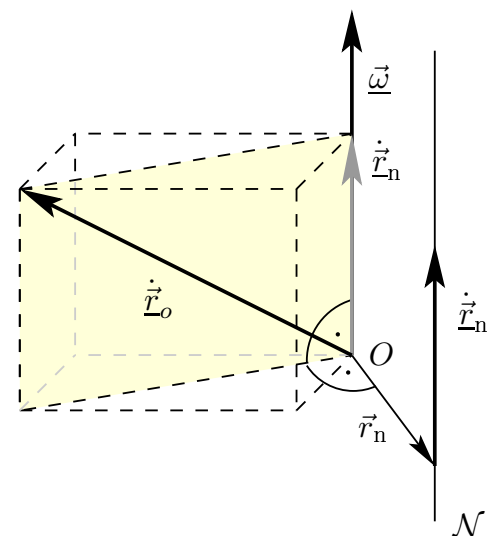


Abbildung 2.2.: Schraubbewegung

meinster Form darzustellen. Das Konzept basiert auf der Einführung von *Motoren* und stammt ursprünglich von RICHARD VON MISES. Die Bezeichnung „Motor“ geht bereits auf E. STUDY zurück [Stu03], stammt aus dem Lateinischen und kann mit „der Bewegter“ übersetzt werden.

2.2.2. Definition und Eigenschaften

Motoren lassen sich auf vielfältige Weise einführen. Während RICHARD VON MISES Motoren zunächst als Äquivalenzklasse geometrischer Objekte definierte, soll hier ein anderer Weg besprochen werden, bei dem Motoren mit Vektorfeldern identifiziert werden.

Ein *Motor* \mathfrak{h} lässt sich demnach vollständig durch die Angabe eines Vektorfeldes $\vec{h} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ charakterisieren, das folgende Eigenschaft erfüllt: Für jeden Motor existiert ein Vektor \vec{g} derart, dass für zwei beliebige Punkte P und Q des Anschauungsraumes die Gleichung

$$\vec{h}(Q) = \vec{h}(P) + \vec{g} \times \overrightarrow{PQ} \quad (2.15)$$

erfüllt wird. Die Menge aller so konstruierten Vektorfelder erzeugt die Menge aller möglichen Motoren \mathcal{M} .

Der Vektor $\vec{h}(P)$ wird *Moment* des Motors am Punkt P genannt, der Vektor \vec{g} als *Resultantvektor* bezeichnet. Falls der Resultantvektor verschwindet ($\vec{g} = \vec{0}$), heißt \mathfrak{h} *uneigentlicher Motor*, andernfalls *eigentlicher Motor*. Für jeden Motor existieren Punkte, an denen das Moment des Motors parallel zum Resultantvektor \vec{g} verläuft. Bei eigentlichen Motoren liegen alle diese Punkte auf einer Geraden \mathcal{N} , der sog. *Motorachse*, und besitzen das gleiche Moment \vec{h}_n . Diese anschauliche Eigenschaft eines Motors wird in späteren Abschnitten ausschlaggebend sein, den Motor grafisch als Doppelpfeil auf der momentanen Motorachse darzustellen.

Bemerkung. Sowohl das Vektorfeld als auch die Motorachse sind dabei als „raumfest“ zu betrachten und hängen weder von der Wahl eines Bezugspunktes zur Angabe der Ortsvektoren noch von einem konkreten Koordinatensystem zur Darstellung der Vektoren ab.

Wählt man jedoch einen beliebigen Bezugspunkt O , so lassen sich die Punkte P und Q mit ihren entsprechenden Ortsvektoren $\vec{r}_P = \overrightarrow{OP}$ bzw. $\vec{r}_Q = \overrightarrow{OQ}$ identifizieren. Aus Gleichung (2.15) ergibt sich dann das Moment des Motors für jeden beliebigen Punkt P zu

$$\vec{h}(\vec{r}_P) = \vec{h}_o + \vec{g} \times \vec{r}_P. \quad (2.15a)$$

Das Moment am Bezugspunkt O wird darin mit \vec{h}_o gekennzeichnet. Für die Motorachse lässt sich die folgende Parameterdarstellung angeben (vergleiche Abbildung 2.2 mit $\vec{\omega} = \vec{g}$, $\vec{r}_o = \vec{h}_o$ und $\vec{r}_n = \vec{h}_n$):

$$\vec{r}_n(\lambda) = \frac{\vec{g} \times \vec{h}_o}{|\vec{g}|^2} + \lambda \vec{g} \quad \text{mit } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Damit gilt für alle Punkte auf der Motorachse

$$\vec{h}(\vec{r}_n) = \vec{h}_o + \vec{g} \times \vec{r}_n = \vec{h}_o + \vec{g} \times \left(\frac{\vec{g} \times \vec{h}_o}{|\vec{g}|^2} + \lambda \vec{g} \right) = \vec{h}_o + \frac{\vec{g} \cdot \vec{h}_o}{|\vec{g}|^2} \vec{g} - \frac{|\vec{g}|^2}{|\vec{g}|^2} \vec{h}_o = \frac{\vec{g} \cdot \vec{h}_o}{|\vec{g}|^2} \vec{g}.$$

Das Moment $\vec{h}_n := \vec{h}(\vec{r}_n)$ des Motors auf seiner Motorachse \mathcal{N} ist somit konstant und parallel zum Resultantvektor \vec{g} . Mit

$$\vec{g} \cdot \vec{h}_o = \vec{g} \cdot (\vec{h}_o + \vec{g} \times \vec{r}) = \vec{g} \cdot \vec{h}(\vec{r})$$

zeigt sich zudem, dass der Vektor \vec{h}_n für beliebige Punkte des Vektorfeldes gerade der orthogonalen Projektion des Momentenvektors $\vec{h}(\vec{r})$ auf die Motorachse entspricht. Der Betrag des Momentenvektors $\vec{h}(\vec{r})$ nimmt folglich auf der Motorachse sein Minimum an.

In Gleichung (2.15a) ist erkennbar, dass das dem Motor zugeordnete Vektorfeld auf dem Anschauungsraum \mathbb{R}^3 entlang aller Raumrichtungen stetig partiell differenzierbar ist. Bildet man die Rotation des Vektorfeldes

$$\text{rot}(\vec{h})(\vec{r}) = \text{rot}(\vec{h}_o + \vec{g} \times \vec{r})(\vec{r}) = \text{rot}(\vec{g} \times \vec{r})(\vec{r}) = 2\vec{g},$$

so ergibt¹⁰ sich gerade der doppelte Resultantvektor als Invariante des Vektorfeldes.

Bei der hier eingeführten Notation wird nur aus didaktischen Gründen zwischen dem Motor \mathfrak{h} in Fraktalschrift und dem ihm zugeordneten Vektorfeld \vec{h} , gekennzeichnet durch den gleichen Buchstaben in romanischer Schrift mit Vektorpfeil, unterschieden. Vor allem im Hinblick auf die spätere Angabe der Komponenten soll diese Notation helfen, den Motor als abstraktes Objekt zu verstehen, das unabhängig von der Angabe eines Bezugspunktes existiert. Durch die Festlegung des Vektorfeldes \vec{h} ist der Motor jedoch eindeutig bestimmt.

Zur Angabe eines konkreten Motors muss demnach das Vektorfeld, gegeben durch die Momentenvektoren $\vec{h}(\vec{r})$ aller Raumpunkte, geeignet spezifiziert werden. Die speziellen Eigenschaften des Motors ermöglichen es dabei, das Vektorfeld durch eine endliche Anzahl von Parametern zu charakterisieren. Es bieten sich dafür verschiedene Möglichkeiten an.

In Anlehnung an die Schraubentheorie [Bal00], lässt sich das entstehende Vektorfeld durch seine anschaulichen Anteile, der Schraube¹¹ – bestehend aus Motorachse \mathcal{N} und Steigung γ („pitch“) – sowie der Amplitude („wrench“ bzw. „twist“) eindeutig beschreiben. Aus der Geometrie ist bekannt, dass die Angabe einer raumfesten Geraden, hier der Motorachse, in einem gegebenen Koordinatensystem genau vier skalarer Größen bedarf. Zusammengefasst lässt sich der Motor folglich durch sechs skalare Größen beschreiben. Der Nachteil dieser Art der Parametrisierung ist, dass sich mit ihr wenig vorteilhaft rechnen lässt.

Günstiger hat sich eine andere Art der Beschreibung erwiesen, bei der neben der Richtung der Motorachse, d. h. dem Resultantvektor \vec{g} , der Momentenvektor \vec{h}_o für einen beliebig gewählten Bezugspunkt O angegeben wird. Als Projektionen bezüglich dreier Koordinatenachsen ergeben sich somit ebenfalls sechs skalare Größen, mit denen sich bei einheitlich gewähltem Bezugspunkt sehr vorteilhaft rechnen lässt. Die beiden Vektoren \vec{h}_o und \vec{g} werden daher als *Komponenten* des Motors (bezüglich O) bezeichnet. Bei festgelegtem Bezugspunkt beschreiben sie das Vektorfeld eindeutig und können daher zur Identifizierung eines Motors dienen.

¹⁰Das Ergebnis lässt sich in den Koordinaten bezüglich eines orthonormalen Koordinatensystems leicht nachrechnen.

¹¹Abgeleitet von dem englischen Ausdruck „screw“.

2.2.2.1. Alternative Definitionen

Die bisherige Betrachtung der Motoren als Vektorfeld entspricht nicht der Definition von RICHARD VON MISES. Er führte zunächst die Motoren und alle noch folgenden Operationen auf der Grundlage geometrischer Überlegungen ein [vM24a]. Danach lässt sich ein Motor als geordnetes Paar von Geraden verstehen. Um die Sinnfälligkeit einer solchen Definition einzusehen, erscheint es angebracht, die Eigenschaften derartiger Geradenpaare zu studieren. Die folgenden Erläuterungen können anhand Abbildung 2.3 nachvollzogen werden.

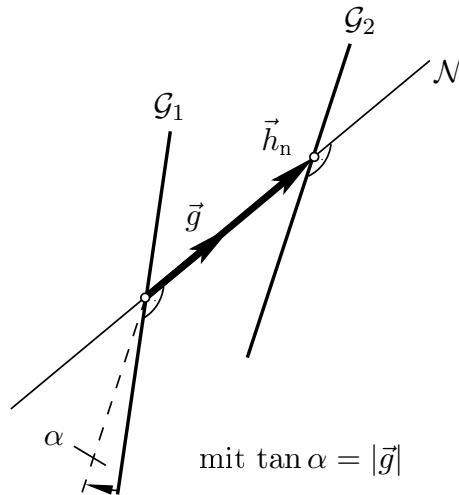


Abbildung 2.3.: Geometrische Deutung des Motors

Ein jedes geordnete Geradenpaar $(\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2)$ besitzt eine Verbindungsgerade \mathcal{N} , die auf jeder der beiden Geraden \mathcal{G}_1 und \mathcal{G}_2 senkrecht steht. Handelt es sich um ein nicht paralleles Geradenpaar, so ist die Verbindungsgerade eindeutig bestimmt, während für parallele Geraden unendlich viele derartiger Verbindungsgeraden existieren. Jede solche Verbindungsgerade soll in Analogie zu [vM24a] Motorachse \mathcal{N} genannt werden. Die orientierte Strecke vom Schnittpunkt der Motorachse mit der ersten Geraden \mathcal{G}_1 zum Schnittpunkt mit der zweiten Geraden \mathcal{G}_2 kann als Motormoment \vec{h}_n auf der Drehachse gedeutet werden. Der Tangens des Winkels, den die beiden Geraden einschließen, entspricht betragsmäßig dem Betrag $|\vec{g}|$ des Resultantvektors. Die Richtung des Resultantvektors ergibt sich aus der Überführung von \mathcal{G}_1 in \mathcal{G}_2 , die per definitionem im mathematisch positiven Sinn um den Resultantvektor geschehen soll. Die aus der Schraubentheorie bekannte Steigung γ ist dem Betrage nach gleich dem Verhältnis der Länge des Momentenvektors $|\vec{h}_n|$ auf der Motorachse zur Länge des Resultantvektors $|\vec{g}|$.

Erkennbar bestimmt jedes geordnete Geradenpaar eindeutig einen Motor. Alle geordneten Geradenpaare, die durch eine Schraubung um ihre Achse ineinander überführt werden können, beschreiben den selben Motor¹². Es ist das Verdienst RICHARD VON MISES' sowohl für die Ermittlung des Motormoments an jedem beliebigen Punkt des Raumes als auch für alle später eingeführten Rechenoperationen geometrische Konstruktionen angegeben zu haben [vM24a], die allein auf den

¹²Dies entspricht der geometrischen Definition des Motors in [vM24a]

entsprechenden Geradenpaaren basieren. Hier soll auf diese Konstruktionen nicht näher eingegangen werden.

Der Namensgebung von E. STUDY folgend sollen noch zwei Spezialfälle von Motoren diskutiert werden. Als *Rotor* bezeichne man nachfolgend einen Motor, dessen Momentenvektor auf der Motorachse verschwindet. Geometrisch wird er durch zwei sich schneidende Geraden dargestellt. Charakteristisch für ihn ist, dass das Moment $\vec{h}(\vec{r})$ jedes beliebigen Raumpunktes senkrecht auf dem Resultantvektor \vec{g} steht. Mithin gilt für alle Punkte des Raumes $\vec{h}(\vec{r}) \cdot \vec{g} = 0$. Der *Translator* ist hingegen ein Motor, dessen Resultantvektor der Nullvektor ist. Er lässt sich geometrisch durch zwei parallele Geraden darstellen. Er besitzt keine eindeutig bestimmte Motorachse und entspricht dem bereits eingeführten uneigentlichen Motor.

Bevor im nächsten Abschnitt verschiedene Operationen für die neu eingeführten Motoren definiert werden, soll noch auf die Gleichheit von Motoren eingegangen werden. Entsprechend der Definition werden zwei Motoren \mathfrak{h}_1 und \mathfrak{h}_2 zueinander *gleich* genannt, wenn die Vektorfelder an allen Punkten des Raumes übereinstimmen. Man schreibt dann $\mathfrak{h}_1 = \mathfrak{h}_2$. Mithilfe der Definition des Motors kann diese Eigenschaft auch anhand der Komponenten charakterisiert werden. Zwei Motoren sind genau dann gleich, wenn ihre Komponenten bezüglich desselben Bezugspunktes gleich sind.

2.2.3. Motoralgebra

In den nachfolgenden Absätzen werden für die oben definierten Motoren verschiedene Operationen eingeführt, die das Rechnen mit den zunächst abstrakten Größen ermöglichen. Gegeben seien ein beliebiger Punkt O des Raumes, ein Skalar $\alpha \in \mathbb{R}$ und drei Motoren \mathfrak{h}_i für $i \in \{1, 2, 3\}$ jeweils mit dem Momentenvektor $\vec{h}_i(\vec{r})$ und den Komponenten \vec{g}_i und \vec{h}_{oi} bezüglich O .

Als erste Operation sei die *Addition* zweier Motoren \mathfrak{h}_1 und \mathfrak{h}_2 als punktweise Vektoraddition auf den zugeordneten Vektorfeldern \vec{h}_1 und \vec{h}_2 erklärt. Für das der Summe $\mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2$ zugeordnete Vektorfeld $(\vec{h}_1 + \vec{h}_2)$ gilt somit

$$(\vec{h}_1 + \vec{h}_2)(\vec{r}) = \vec{h}_1(\vec{r}) + \vec{h}_2(\vec{r}).$$

Neutrales Element der Addition ist der sog. *Nullmotor* \mathfrak{o} , dessen Komponenten Nullvektoren sind.

Die *Multiplikation* eines Motors \mathfrak{h}_1 mit einem Skalar α wird ebenfalls punktweise auf dem Vektorfeld definiert als Multiplikation eines jeden Momentenvektors mit dem Skalar α . Es ergibt sich $\alpha\mathfrak{h}_1$ mit

$$(\alpha\vec{h}_1)(\vec{r}) = \alpha\vec{h}_1(\vec{r}).$$

Das neutrale Element ist in Übereinstimmung mit der Vektorrechnung der Skalar $\alpha = 1$. Durch die Rückführung auf die punktweise Anwendung von Vektoroperationen lässt sich nun zeigen, dass die Menge der Motoren mit den eingeführten Operationen ein Vektorraum (über dem Körper der reellen Zahlen) ist.

Basierend auf der Linearität von Gleichung (2.15a) in den Komponenten des Motors lassen sich die eben eingeführten Operationen direkt auf die Komponenten übertragen.

$$\alpha\vec{h}_1(\vec{r}) + \vec{h}_2(\vec{r}) = (\alpha\vec{h}_{o1} + \vec{h}_{o2}) + (\alpha\vec{g}_1 + \vec{g}_2) \times \vec{r}.$$

Betrachtet man die Komponenten des Motors als geordnetes Paar von Vektoren, so wird die Menge aller derartigen Tupel durch die eingeführte Addition und Multiplikation mit einem Skalar ebenfalls zu einem Vektorraum (über dem Körper der reellen Zahlen). Es bietet sich daher an, den Motor unter Angabe des Bezugspunktes in folgender Weise (als „Vektor von Vektoren“) zu notieren

$$\mathfrak{h}|_O := \begin{pmatrix} \vec{g} \\ \vec{h}_o \end{pmatrix}. \quad (2.16)$$

Für die Komponentendarstellung der Addition und der Multiplikation mit einem Skalar gilt somit:

$$\alpha \vec{h}_1(\vec{r}) + \vec{h}_2(\vec{r}) \Big|_O = \begin{pmatrix} \alpha \vec{g}_1 + \vec{g}_2 \\ \alpha \vec{h}_{o1} + \vec{h}_{o2} \end{pmatrix}.$$

Ergänzt werden diese beiden Operationen durch zwei weitere Produkte. Zur Einführung des *skalaren Produktes*¹³ der beiden Motoren \mathfrak{h}_1 und \mathfrak{h}_2 betrachte man zunächst das Skalarfeld

$$\frac{1}{2} \left(\text{rot}(\vec{h}_1) \cdot \vec{h}_2 + \text{rot}(\vec{h}_2) \cdot \vec{h}_1 \right) = \vec{g}_1 \cdot \vec{h}_2 + \vec{g}_2 \cdot \vec{h}_1.$$

Mithilfe von Gleichung (2.15a) lässt sich zeigen, dass dieses Skalarfeld an jedem Punkt \vec{r} den gleichen Wert annimmt, denn mit der Beziehung $\vec{g}_2 \cdot (\vec{g}_1 \times \vec{r}) = -\vec{g}_1 \cdot (\vec{g}_2 \times \vec{r})$ (vergl. Anhang A.1) folgt für beliebige Punkte des Raumes

$$\vec{g}_1 \cdot \vec{h}_2(\vec{r}) + \vec{g}_2 \cdot \vec{h}_1(\vec{r}) = \vec{g}_1 \cdot (\vec{h}_{o2} + \vec{g}_2 \times \vec{r}) + \vec{g}_2 \cdot (\vec{h}_{o1} + \vec{g}_1 \times \vec{r}) = \vec{g}_1 \cdot \vec{h}_{o2} + \vec{g}_2 \cdot \vec{h}_{o1}.$$

Damit lässt sich das Ergebnis des skalaren Produktes zweier Motoren tatsächlich als ein vom Bezugspunkt unabhängiger Skalar deuten, dessen Wert als skalares Produkt zweier Motoren bezeichnet wird. Aus dieser kurzen Rechnung resultiert gleichsam eine Vorschrift zur Berechnung des skalaren Produktes bei Angabe des Motors in seinen Komponenten:

$$\mathfrak{h}_1 \cdot \mathfrak{h}_2 := \vec{g}_1 \cdot \vec{h}_2(\vec{r}) + \vec{g}_2 \cdot \vec{h}_1(\vec{r}) = \vec{g}_1 \cdot \vec{h}_{o2} + \vec{g}_2 \cdot \vec{h}_{o1}.$$

Als *motorisches Produkt* oder kurz *Motorprodukt* der beiden Motoren \mathfrak{h}_1 und \mathfrak{h}_2 bezeichne man die Abbildung

$$\mathfrak{h}_1 \times \mathfrak{h}_2 := \frac{\partial \vec{h}_1}{\partial \vec{r}} \cdot \vec{h}_2 - \frac{\partial \vec{h}_2}{\partial \vec{r}} \cdot \vec{h}_1 = [\vec{h}_2, \vec{h}_1],$$

deren Ergebnis ein Motor ist, wobei $[\cdot, \cdot]$ die aus der Differentialgeometrie bekannte LIE-Klammer bezeichnet [AMR88]. Aus der angegebenen Darstellung wird nicht sofort ersichtlich, ob es sich dabei tatsächlich um einen Motor handelt. Um dies einzusehen, muss Gleichung (2.15a) bezüglich des Vektors \vec{r} abgeleitet und in obige Definition eingesetzt werden. Mit (A.2) ergibt sich zunächst

$$\frac{\partial \vec{h}_1}{\partial \vec{r}} \cdot \vec{h}_2 - \frac{\partial \vec{h}_2}{\partial \vec{r}} \cdot \vec{h}_1 = \underbrace{\frac{\partial \vec{h}_1}{\partial \vec{r}} \cdot \vec{h}_2}_{\vec{g}_1} - \underbrace{\frac{\partial \vec{h}_2}{\partial \vec{r}} \cdot \vec{h}_1}_{\vec{g}_2} = \vec{g}_1 \times \vec{h}_2 - \vec{g}_2 \times \vec{h}_1.$$

¹³Auf das Wort Skalarprodukt wird bewusst verzichtet, da das angegebene Produkt nicht alle Eigenschaften eines Skalarproduktes im herkömmlichen Sinne erfüllt (vergleiche [AE98]). So folgt aus $\mathfrak{h}_1 \cdot \mathfrak{h}_1 = 0$ nicht notwendigerweise, dass $\mathfrak{h}_1 = \mathfrak{o}$ ist.

Für beliebige Ortsvektoren \vec{r} gilt dann

$$\begin{aligned}\vec{g}_1 \times \vec{h}_2(\vec{r}) - \vec{g}_2 \times \vec{h}_1(\vec{r}) &= \vec{g}_1 \times (\vec{h}_{o2} + \vec{g}_2 \times \vec{r}) - \vec{g}_2 \times (\vec{h}_{o1} + \vec{g}_1 \times \vec{r}) \\ \vec{g}_1 \times \vec{h}_2(\vec{r}) - \vec{g}_2 \times \vec{h}_1(\vec{r}) &= (\vec{g}_1 \times \vec{h}_{o2} - \vec{g}_2 \times \vec{h}_{o1}) + \vec{g}_1 \times (\vec{g}_2 \times \vec{r}) - \vec{g}_2 \times (\vec{g}_1 \times \vec{r}) \\ \vec{g}_1 \times \vec{h}_2(\vec{r}) - \vec{g}_2 \times \vec{h}_1(\vec{r}) &= (\vec{g}_1 \times \vec{h}_{o2} - \vec{g}_2 \times \vec{h}_{o1}) + (\vec{g}_1 \times \vec{g}_2) \times \vec{r}.\end{aligned}$$

Damit genügt das entstandene Vektorfeld tatsächlich Gleichung (2.15a). Es handelt sich folglich um einen Motor mit den Komponenten

$$\mathfrak{h}_1 \times \mathfrak{h}_2|_O = \begin{pmatrix} \vec{g}_1 \times \vec{g}_2 \\ \vec{g}_1 \times \vec{h}_{o2} - \vec{g}_2 \times \vec{h}_{o1} \end{pmatrix}.$$

Bemerkung. Durch Einführung des motorischen Produktes wird der Vektorraum der Motoren zu einer sog. *Lie-Algebra*¹⁴. Charakteristisch für eine Lie-Algebra ist neben der speziellen Struktur eines Vektorraums eine zweistellige Verknüpfung (hier das motorische Produkt), deren Ergebnis wieder im Vektorraum liegt und folgende Eigenschaften erfüllt:

1. Die Bilinearität des Motorproduktes: sie erfordert die Linearität in beiden Argumenten:

$$(\alpha \mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2) \times \mathfrak{h}_3 = \alpha \mathfrak{h}_1 \times \mathfrak{h}_3 + \mathfrak{h}_2 \times \mathfrak{h}_3 \quad \text{und} \quad \mathfrak{h}_1 \times (\alpha \mathfrak{h}_2 + \mathfrak{h}_3) = \alpha \mathfrak{h}_1 \times \mathfrak{h}_2 + \mathfrak{h}_1 \times \mathfrak{h}_3.$$

2. Die Schiefkommutativität des motorischen Produktes:

$$\mathfrak{h}_1 \times \mathfrak{h}_2 = -\mathfrak{h}_2 \times \mathfrak{h}_1.$$

3. Das motorische Produkt genügt der JACOBI-Identität, d. h.

$$\mathfrak{h}_1 \times (\mathfrak{h}_2 \times \mathfrak{h}_3) + \mathfrak{h}_2 \times (\mathfrak{h}_3 \times \mathfrak{h}_1) + \mathfrak{h}_3 \times (\mathfrak{h}_1 \times \mathfrak{h}_2) = 0.$$

Unter Zuhilfenahme geeigneter Regeln der Vektoralgebra lassen sich diese Eigenschaften für das motorische Produkt nachweisen.

Zusammenfassend können für die bisher definierten Operationen folgende Rechenregeln (hier ohne Beweise) angegeben werden:

$$\begin{aligned}\mathfrak{h}_1 \cdot \mathfrak{h}_2 &= \mathfrak{h}_2 \cdot \mathfrak{h}_1 & \mathfrak{h}_1 \times \mathfrak{h}_2 &= -\mathfrak{h}_2 \times \mathfrak{h}_1 \\ \mathfrak{h}_1 \cdot (\mathfrak{h}_2 + \mathfrak{h}_3) &= \mathfrak{h}_1 \cdot \mathfrak{h}_2 + \mathfrak{h}_1 \cdot \mathfrak{h}_3 & \mathfrak{h}_1 \times (\mathfrak{h}_2 + \mathfrak{h}_3) &= \mathfrak{h}_1 \times \mathfrak{h}_2 + \mathfrak{h}_1 \times \mathfrak{h}_3 \\ (\alpha \mathfrak{h}_1) \cdot \mathfrak{h}_2 &= \alpha(\mathfrak{h}_1 \cdot \mathfrak{h}_2) & (\alpha \mathfrak{h}_1) \times \mathfrak{h}_2 &= \alpha(\mathfrak{h}_1 \times \mathfrak{h}_2) \\ \mathfrak{h}_1 \cdot (\mathfrak{h}_2 \times \mathfrak{h}_3) &= \mathfrak{h}_2 \cdot (\mathfrak{h}_3 \times \mathfrak{h}_1) = \mathfrak{h}_3 \cdot (\mathfrak{h}_1 \times \mathfrak{h}_2).\end{aligned}$$

Im nächsten Abschnitt folgen nun einige Sätze zu Eigenschaften von Motoren, die im späteren Verlauf wichtig sein werden. Deren Beweise lassen sich entweder nachrechnen oder können in [vM24a] oder [Bra47] nachgelesen werden.

¹⁴Benannt nach dem Mathematiker Sophus Lie (1842–1899).

2.2.3.1. Wichtige Sätze und Eigenschaften der eingeführten Definitionen und Operationen

Satz 2.1 Sei \mathfrak{h} ein Rotor mit dem Resultantvektor \vec{g} und dem Momentvektor $\vec{h}(\vec{r})$ bezüglich eines beliebigen Punktes P des Raumes. Dann gilt

$$\vec{g} \cdot \vec{h}(\vec{r}) = 0. \quad (2.17)$$

Der Momentvektor eines Rotors steht folglich an jedem beliebigen Punkt des Raumes senkrecht auf dem Resultantvektor.

Bemerkung. Die Umkehrung gilt nicht, da auch bei Translatoren das Produkt $\vec{g} \cdot \vec{h}(\vec{r})$ verschwindet.

Satz 2.2 Die Summe zweier Rotoren ist dann und nur dann ein Rotor, wenn die Motorachsen beider Rotoren in einer Ebene liegen und die Summe beider Resultantvektoren nicht verschwindet. Falls die Motorachsen nicht parallel sind, verläuft die Motorachse des Summenrotors durch den Schnittpunkt beider Rotoren. Falls sie parallel sind, ist die Motorachse des Summenrotors ebenfalls parallel zu den beiden Motorachsen. Das Verhältnis des Abstands der beiden Motorachsen zur Motorachse des Summenrotors gleicht dann dem reziproken Verhältnis der Längen der beiden Resultantvektoren.

Satz 2.3 Hingegen ist die Summe zweier paralleler Rotoren, deren Resultantvektoren sich zum Nullvektor addieren, ein Translator mit dem Moment $\vec{r}_{12} \times \vec{g}$. Dabei bezeichnet \vec{r}_{12} den Ortsvektor, der von einem Punkt der Motorachse des ersten Rotors zu einem Punkt auf der Motorachse des zweiten Motors zeigt.

Satz 2.4 Das skalare Produkt zweier Motoren verschwindet dann und nur dann, wenn einer der folgenden Fälle eintritt:

- a) einer der beiden Motoren ist der Nullmotor,
- b) beide Motoren sind uneigentliche Motoren (Translatoren),
- c) beide Motorachsen schneiden sich im rechten Winkel¹⁵ oder
- d) die Resultantvektoren \vec{g}_1 und \vec{g}_2 stehen nicht senkrecht aufeinander und erfüllen folgende Beziehung:

$$\gamma_1 + \gamma_2 = d \tan(\angle(\vec{g}_1, \vec{g}_2)), \quad (2.18)$$

wobei γ_1, γ_2 jeweils die Steigung der den Motoren zugeordneten Schrauben bezeichne (vergleiche Abschnitt 2.2.2.1) und d den kürzesten Abstand der beiden Motorachsen.

Korollar (1) Das skalare Produkt zweier Rotoren verschwindet dann und nur dann, wenn deren Achsen in einer Ebene liegen. Denn für Rotoren gilt: $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$. Aus (2.18) folgt direkt, dass die Motorachsen sich entweder schneiden ($d = 0$) oder parallel zueinander verlaufen müssen ($\tan(\angle(\vec{g}_1, \vec{g}_2)) = 0$)

Korollar (2) Die Motorachsen zweier eigentlicher Motoren schneiden sich genau dann im rechten Winkel zueinander, wenn die skalaren Produkte der beiden Motoren und der zugehörigen Resultantvektoren verschwinden. Die Aussage entspricht direkt Fall c).

¹⁵Falls einer der beiden Motoren ein uneigentlicher Motor (Translator) ist, dann existieren Motorachsen des Translators, die sich senkrecht mit der anderen Motorachse schneiden.

Korollar (3) *Kann einer der beiden Motoren beliebige Werte annehmen, so kann das skalare Produkt nur dann verschwinden, wenn es sich beim jeweils anderen Motor um den Nullmotor handelt.*

Satz 2.5 *Das Motorprodukt zweier eigentlicher Motoren verschwindet genau dann, wenn deren Motorachsen zusammenfallen¹⁶.*

2.2.3.2. Basis und Einheitsmotoren

Wie bereits erwähnt, bildet die Menge aller Motoren \mathcal{M} einen Vektorraum (über dem Körper der reellen Zahlen). Die Dimension dieses Vektorraumes ist durch die maximale Anzahl linear unabhängiger Motoren gegeben. Anhand der Darstellung des Motors in seinen Komponenten lässt sich erkennen, dass die Dimension des Vektorraumes sechs beträgt. Jeder Satz von sechs linear unabhängigen Motoren bildet daher eine *Basis* in \mathcal{M} . Bezüglich einer Basis lässt sich jeder Motor eindeutig in der Form

$$\mathfrak{h} = h_1 \mathfrak{h}_1 + h_2 \mathfrak{h}_2 + h_3 \mathfrak{h}_3 + h_4 \mathfrak{h}_4 + h_5 \mathfrak{h}_5 + h_6 \mathfrak{h}_6 \quad (2.19)$$

darstellen (siehe [Gan86]). Die linear unabhängigen Motoren \mathfrak{h}_i werden *Basismotoren* genannt, die reellen Konstanten h_i ($i = 1, \dots, 6$) *Koordinaten* des Motors bezüglich der gewählten Basis. Die Bestimmung der Koordinaten h_i gelingt mithilfe des skalaren Produktes. Multipliziert man Gleichung (2.19) skalar mit jedem der Basismotoren durch, entsteht ein lineares Gleichungssystem in den Koordinaten h_i :

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{h}_1 \cdot \mathfrak{h}_1 & \cdots & \mathfrak{h}_1 \cdot \mathfrak{h}_6 \\ \vdots & & \vdots \\ \mathfrak{h}_6 \cdot \mathfrak{h}_1 & \cdots & \mathfrak{h}_6 \cdot \mathfrak{h}_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathfrak{h}_1 \cdot \mathfrak{h} \\ \vdots \\ \mathfrak{h}_6 \cdot \mathfrak{h} \end{pmatrix}.$$

Notwendig und hinreichend dafür, dass dieses lineare Gleichungssystem eine eindeutige Lösung liefert, ist, dass die Koeffizientenmatrix $(\mathfrak{h}_i \cdot \mathfrak{h}_j)_{i,j}$ regulär ist. Sie ist genau dann regulär, wenn ihre Zeilen linear unabhängig sind, wenn also die Linearkombination der sechs Zeilen nur dann verschwindet

$$\sum_{i=1}^6 \alpha_i (\mathfrak{h}_i \cdot \mathfrak{h}_1 \quad \cdots \quad \mathfrak{h}_i \cdot \mathfrak{h}_6) = \mathbf{0},$$

falls alle α_i ($i = 1, \dots, 6$) selbst verschwinden. Dies ist in der Tat der Fall, denn multipliziert man die Gleichung von rechts mit einem beliebigen Vektor $(\beta_1 \quad \cdots \quad \beta_6)^T$ durch, so folgt aus der Linearität des skalaren Produktes:

$$\sum_{j=1}^6 \beta_j \left(\sum_{i=1}^6 \alpha_i \mathfrak{h}_i \cdot \mathfrak{h}_j \right) = \left(\sum_{i=1}^6 \alpha_i \mathfrak{h}_i \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^6 \beta_j \mathfrak{h}_j \right) = 0.$$

Da die Motoren \mathfrak{h}_j aber eine Basis bilden, lässt sich mit $\sum_{j=1}^6 \beta_j \mathfrak{h}_j$ jeder beliebige Motor erzeugen, sodass die Gleichung nach Korollar (3) zu Satz 2.4 nur erfüllt werden kann, wenn $\sum_{i=1}^6 \alpha_i \mathfrak{h}_i$

¹⁶Falls einer der Motoren ein uneigentlicher ist, existiert eine Achse des uneigentlichen Motors, die mit der Achse des anderen Motors zusammen fällt. Alle weiteren Motorachsen des uneigentlichen Motors liegen parallel dazu.

verschwindet. Aufgrund der linearen Unabhängigkeit der Motoren \mathfrak{h}_i folgt nun aber, dass alle α_i verschwinden müssen, womit die lineare Unabhängigkeit der Zeilen der Koeffizientenmatrix $(\mathfrak{h}_i \cdot \mathfrak{h}_j)_{i,j}$ gezeigt ist. Die Koordinaten h_i lassen sich mithin eindeutig ermitteln. Beim praktischen Rechnen mit Motoren wird man, anstelle einer allgemeinen Basis, oftmals einen konkreten Bezugspunkt wählen und die Komponenten des Motors dann bezüglich eines gegebenen Koordinatensystems \mathcal{F} angeben. Dies soll in den nachstehenden Abschnitten durch folgende Notation zum Ausdruck gebracht werden:

$$\mathfrak{h}|_{\mathcal{F}} := \begin{pmatrix} \vec{g}|_{\mathcal{F}} \\ \vec{h}_o|_{\mathcal{F}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_6 \end{pmatrix}.$$

In den meisten Fällen erweist sich ein Koordinatensystem mit orthogonalen Einheitsvektoren als besonders zweckmäßig, da sich die Koordinaten des Motors bezüglich einer solchen Basis besonders einfach ermitteln lassen.

Bei der Einführung des skalaren Produktes wurde bereits erwähnt, dass es sich dabei um kein Skalarprodukt (im mathematischen Sinne) handelt, da es keine Norm auf dem Vektorraum induziert. Für die Definition von Einheitsmotoren wäre es jedoch zweckmäßig, wenn man ein Maß für die „Länge“ eines Motors zugrunde legen würde. Dies erweist sich jedoch als schwierig. Der Darstellung [vM24a] folgend, sollten bei der Einführung von Einheitsmotoren zwei Fälle unterschieden werden. Für den Fall eigentlicher Motoren bietet sich das Konzept der Schraube an, gegeben durch ihre Achse \mathcal{N} und ihre Steigung γ , wobei eine sechste Größe zur Skalierung des Motors offen bleibt. Der Fall uneigentlicher Motoren kann damit jedoch nicht abgedeckt werden¹⁷. Deshalb sollten zu den möglichen Schrauben alle möglichen Translatoren ergänzt werden, deren Momentvektor die Länge eins besitzt. Formal ergibt sich damit folgende Definition: Unter einem *Einheitsmotor* verstehe man

- a) einen eigentlichen Motor, dessen Resultantvektor die Länge eins besitzt: $|\vec{g}| = 1$,

oder

- b) einen uneigentlichen Motor, dessen Momentvektor die Länge eins besitzt: $|\vec{h}(\vec{r})| = 1$.

Dieser Definition entsprechend, lässt sich ein Funktional $l : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ definieren, das jeden Motor \mathfrak{h} mit den Komponenten \vec{g} und $\vec{h}(\vec{r})$ auf einen positiven reellen Wert¹⁸ abbildet:

$$l(\mathfrak{h}) := \begin{cases} |\vec{g}| & \text{falls } |\vec{g}| \neq 0 \\ |\vec{h}(\vec{r})| & \text{sonst.} \end{cases}$$

Das angegebene Funktional erfüllt jedoch nicht die Forderungen einer Norm¹⁹, da es die Dreiecksungleichung im Allgemeinen nicht erfüllt. Ein Gegenbeispiel liefern die zwei Motoren

$$\mathfrak{h}_1|_P = \begin{pmatrix} \vec{e}_x \\ 3\vec{e}_x \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathfrak{h}_2|_P = \begin{pmatrix} -\vec{e}_x \\ 4\vec{e}_y \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2|_P = \begin{pmatrix} \vec{0} \\ 3\vec{e}_x + 4\vec{e}_y \end{pmatrix}$$

¹⁷Er entspräche einer „unendlichen“ Steigung der zugehörigen Schraube.

¹⁸Man beachte, dass das angegebene Funktional tatsächlich unabhängig von der Wahl des Bezugspunktes und der Basis zur Darstellung der Motorkoordinaten ist.

¹⁹Eine Norm muss die in [AE98, S. 160] angegebenen Eigenschaften erfüllen.

sowie $|\vec{e}_x| = |\vec{e}_y| = 1$, $\vec{e}_x \cdot \vec{e}_y = 0$, denn für sie gilt offenbar

$$l(\mathfrak{h}_1) + l(\mathfrak{h}_2) = 2 < l(\mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2) = 5.$$

Es erweist sich damit als ungeeignet, bei $l(\mathfrak{h})$ von der „Länge“ des Motors zu sprechen.

2.2.3.3. Motordyaden

In Analogie zur Vektorrechnung lassen sich für die Motorrechnung ebenfalls Dyaden als lineare Funktionen einführen, aus denen bei Anwendung auf einen Motor wiederum ein Motor resultiert. Eine *Motordyade* ist also eine Abbildung $\mathfrak{D} : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ mit

$$\mathfrak{D}(\alpha\mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2) = \alpha\mathfrak{D}(\mathfrak{h}_1) + \mathfrak{D}(\mathfrak{h}_2) \quad \text{für } \alpha \in \mathbb{R} \text{ und } \mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2 \in \mathcal{M}.$$

Gegeben sei das Produkt $\mathfrak{h}_1(\mathfrak{h}_2 \cdot \mathfrak{h}_3)$, dessen Ergebnis linear in den Komponenten aller drei Motoren ist. Betrachtet man dieses Dreifachprodukt nun als lineare Abbildung, die auf das letzte Argument \mathfrak{h}_3 wirkt, so stellt sich die Frage, welche Form die zugehörige Dyade annimmt. Die entsprechende Abbildung wird in Anlehnung an [vM24a] als (*erstes*) *dyadisches Produkt* der Motoren \mathfrak{h}_1 und \mathfrak{h}_2 bezeichnet und wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} \mathfrak{h}_1 \otimes \mathfrak{h}_2 : \mathcal{M} &\rightarrow \mathcal{M} \\ \mathfrak{h}_3 &\mapsto \mathfrak{h}_1(\mathfrak{h}_2 \cdot \mathfrak{h}_3). \end{aligned}$$

Das Ergebnis dieser Abbildung besitzt die gleiche Achse und die gleiche Steigung wie der Motor \mathfrak{h}_1 . Bei der Anwendung wirkt der Motor \mathfrak{h}_2 entsprechend der Definition des skalaren Produktes auf \mathfrak{h}_3 , sodass die Schreibweise

$$(\mathfrak{h}_1 \otimes \mathfrak{h}_2) \cdot \mathfrak{h}_3 = \mathfrak{h}_1 \otimes \mathfrak{h}_2 \cdot \mathfrak{h}_3 = \mathfrak{h}_1(\mathfrak{h}_2 \cdot \mathfrak{h}_3)$$

gerechtfertigt erscheint.

In Übereinstimmung mit dem ursprünglich betrachteten Dreifachprodukt von Motoren kann im nächsten Schritt die Summe und die Multiplikation mit einem Skalar für die so entstandene Dyade eingeführt werden:

$$(\alpha\mathfrak{h}_1 \otimes \mathfrak{h}_2 + \mathfrak{h}_3 \otimes \mathfrak{h}_4)(\mathfrak{h}_5) := \alpha(\mathfrak{h}_1 \otimes \mathfrak{h}_2)(\mathfrak{h}_5) + (\mathfrak{h}_3 \otimes \mathfrak{h}_4)(\mathfrak{h}_5) = \alpha\mathfrak{h}_1(\mathfrak{h}_2 \cdot \mathfrak{h}_5) + \mathfrak{h}_3(\mathfrak{h}_4 \cdot \mathfrak{h}_5).$$

Durch die damit definierten Operationen ergeben sich neue Dyaden, die sich im Allgemeinen nicht mehr als ein (*erstes*) dyadisches Produkt zweier Motoren darstellen lassen. Wird die eben definierte Addition auf eine beliebige Anzahl von Summanden erweitert, so erfüllen die derart eingeführten Dyaden (zusammen mit der Addition und der Multiplikation mit einem Skalar) die Eigenschaften eines Vektorraums. Wie in Anhang A.1.4 gezeigt wird, lässt sich allerdings jede Dyade eindeutig als Linearkombination von (*ersten*) dyadischen Produkten darstellen. Die eingeführten Operationen lassen sich daher direkt auf allgemeine Dyaden übertragen.

Für das (*erste*) dyadische Produkt ergeben sich zusätzlich folgende Rechenregeln:

$$\begin{aligned} \mathfrak{h}_1 \otimes \mathfrak{h}_2 &\neq \mathfrak{h}_2 \otimes \mathfrak{h}_1 & (\mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2) \otimes \mathfrak{h}_3 &= \mathfrak{h}_1 \otimes \mathfrak{h}_3 + \mathfrak{h}_2 \otimes \mathfrak{h}_3 \\ \alpha(\mathfrak{h}_1 \otimes \mathfrak{h}_2) &= (\alpha\mathfrak{h}_1) \otimes \mathfrak{h}_2 = \mathfrak{h}_1 \otimes (\alpha\mathfrak{h}_2) & \mathfrak{h}_1 \otimes (\mathfrak{h}_2 + \mathfrak{h}_3) &= \mathfrak{h}_1 \otimes \mathfrak{h}_2 + \mathfrak{h}_1 \otimes \mathfrak{h}_3. \end{aligned}$$

Die Zerlegung der Motoren des (ersten) dyadischen Produkts in ihre Komponenten (bezüglich eines festgelegten Punktes O) liefert eine Komponentendarstellung des dyadischen Produktes:

$$\begin{aligned} (\mathfrak{h}_1 \otimes \mathfrak{h}_2)(\mathfrak{h}_3)|_O &= \begin{pmatrix} \vec{g}_1 \\ \vec{h}_{o1} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \vec{g}_2 \\ \vec{h}_{o2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{g}_3 \\ \vec{h}_{o3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{g}_1 \otimes \vec{g}_2 & \vec{g}_1 \otimes \vec{h}_{o2} \\ \vec{h}_{o1} \otimes \vec{g}_2 & \vec{h}_{o1} \otimes \vec{h}_{o2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{g}_3 \\ \vec{h}_{o3} \end{pmatrix} \\ (\mathfrak{h}_1 \otimes \mathfrak{h}_2)(\mathfrak{h}_3)|_O &= \begin{pmatrix} \vec{g}_1(\vec{g}_2 \cdot \vec{h}_{o3} + \vec{h}_{o2} \cdot \vec{g}_3) \\ \vec{h}_{o1}(\vec{g}_2 \cdot \vec{h}_{o3} + \vec{h}_{o2} \cdot \vec{g}_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{g}_1 \\ \vec{h}_{o,1} \end{pmatrix} (\vec{g}_2 \cdot \vec{h}_{o3} + \vec{h}_{o2} \cdot \vec{g}_3). \end{aligned}$$

In dieser Weise lassen sich beliebige Dyaden durch ihre Komponenten bezüglich O darstellen:

$$\mathfrak{D} \cdot \mathfrak{h}|_O = \begin{pmatrix} \mathcal{D}_{11} & \mathcal{D}_{12} \\ \mathcal{D}_{21} & \mathcal{D}_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{g} \\ \vec{h}_o \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{D}_{11} \cdot \vec{h}_o + \mathcal{D}_{12} \cdot \vec{g} \\ \mathcal{D}_{21} \cdot \vec{h}_o + \mathcal{D}_{22} \cdot \vec{g} \end{pmatrix}.$$

Bevor weitere Definitionen folgen, sollen zunächst zwei Beispiele gezeigt werden, die beim praktischen Rechnen mit Motoren sehr hilfreich sein können.

Beispiel 2.1 (Dyadische Darstellung des motorischen Produktes). Aufgrund der Linearität in beiden Argumenten lässt sich das motorische Produkt als Dyade darstellen:

$$\tilde{\mathfrak{h}}_1 \cdot \mathfrak{h}_2|_O := \mathfrak{h}_1 \times \mathfrak{h}_2|_O = \begin{pmatrix} \vec{g}_1 \\ \vec{h}_{o1} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \vec{g}_2 \\ \vec{h}_{o2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{O} & \tilde{\vec{g}}_1 \\ \tilde{\vec{g}}_1 & \vec{h}_{o1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{g}_2 \\ \vec{h}_{o2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{g}_1 \times \vec{g}_2 \\ \vec{g}_1 \times \vec{h}_{o2} - \vec{g}_2 \times \vec{h}_{o1} \end{pmatrix}.$$

Die beiden Vektordyaden $\tilde{\vec{g}}_1$ und \vec{h}_{o1} stellen dabei die Kreuzprodukt-dyaden der Komponenten des Motors \mathfrak{h}_1 dar, die Dyade \mathcal{O} die sog. Nulldyade²⁰. Die neu eingeführte Dyade $\tilde{\mathfrak{h}}_1$ wird als *Motorprodukt-dyade* bezeichnet. \diamond

Beispiel 2.2 (Dyadische Darstellung einer endlichen Motorbewegung). Gegeben sei ein Motor \mathfrak{h}_1 mit den Komponenten \vec{g}_1 und \vec{h}_{o1} bezüglich eines beliebigen Punktes O . Seine Motorachse \mathcal{N} erfahre zunächst eine Verschiebung derart, dass der Punkt P auf der ursprünglichen Motorachse in den Punkt Q überführt wird. Der Verschiebungsvektor zwischen P und Q sei \vec{r} , seine Kreuzprodukt-dyade $\tilde{\vec{r}}$. Anschließend erfahre die so entstandene Motorachse eine Drehung um den Punkt Q so, dass ein neuer Motor \mathfrak{h}_2 mit dem Resultantvektor $\vec{g}_2 = \mathcal{R} \cdot \vec{g}_1$ entsteht. Für das Moment des entstandenen Motors \mathfrak{h}_2 am Punkt O muss dann $\vec{h}_{o2} = \mathcal{R} \cdot (\vec{h}_{o1} - \vec{g}_1 \times \vec{r})$ gelten. Die genannten Operationen lassen sich in einer Dyade \mathfrak{T} zusammenfassen, deren Komponenten sich in der Form

$$\mathfrak{h}_2|_O = \begin{pmatrix} \vec{g}_2 \\ \vec{h}_{o2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{R} \cdot \vec{g}_1 \\ \mathcal{R} \cdot \vec{h}_{o1} + \mathcal{R} \cdot \tilde{\vec{r}} \cdot \vec{g}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{O} & \mathcal{R} \\ \mathcal{R} & \mathcal{R} \cdot \tilde{\vec{r}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{g}_1 \\ \vec{h}_{o1} \end{pmatrix} =: [\mathfrak{T} \cdot \mathfrak{h}_1]|_O$$

notieren lassen. Dabei ist die Reihenfolge, in der die beiden Operationen (Verschiebung und Verdrehung) ausgeführt wurden, von Bedeutung. Führt man zuerst die Drehung \mathcal{R} um den Punkt P aus und verschiebt dann den Punkt P in den Punkt Q um den Verschiebungsvektor \vec{r} , so sind in der vierten Komponente der Dyade \mathfrak{T} die Dyaden \mathcal{R} und $\tilde{\vec{r}}$ zu vertauschen. Selbstverständlich enthält diese Dyade auch die Spezialfälle reiner Verschiebung ($\mathcal{R} = \mathcal{I}$) und reiner Drehung ($\tilde{\vec{r}} = \mathcal{O}$). \diamond

Für die mehrfache Anwendung von Dyaden nacheinander wird entsprechend

$$\mathfrak{D}(\mathfrak{T}(\mathfrak{h})) = \mathfrak{D} \cdot (\mathfrak{T} \cdot \mathfrak{h}) =: (\mathfrak{D} \cdot \mathfrak{T}) \cdot \mathfrak{h} = \mathfrak{D} \cdot \mathfrak{T} \cdot \mathfrak{h}$$

²⁰Die Nulldyade der Vektorrechnung ist eine Dyade, die sich bezüglich beliebiger Raumrichtungen als 3×3 -Nullmatrix darstellen lässt.

zusätzlich das *Produkt* $\mathfrak{D} \cdot \mathfrak{F}$ zweier Dyaden \mathfrak{D} und \mathfrak{F} eingeführt. Für die Komponenten der Dyaden ergibt sich daraus

$$\mathfrak{D} \cdot \mathfrak{F}|_O = \begin{pmatrix} \mathcal{D}_{11} & \mathcal{D}_{12} \\ \mathcal{D}_{21} & \mathcal{D}_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathcal{F}_{11} & \mathcal{F}_{12} \\ \mathcal{F}_{21} & \mathcal{F}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{D}_{11} \cdot \mathcal{F}_{21} + \mathcal{D}_{12} \cdot \mathcal{F}_{11} & \mathcal{D}_{11} \cdot \mathcal{F}_{22} + \mathcal{D}_{12} \cdot \mathcal{F}_{12} \\ \mathcal{D}_{21} \cdot \mathcal{F}_{21} + \mathcal{D}_{22} \cdot \mathcal{F}_{11} & \mathcal{D}_{21} \cdot \mathcal{F}_{22} + \mathcal{D}_{22} \cdot \mathcal{F}_{12} \end{pmatrix}$$

Das neutrale Element der dyadischen Multiplikation ist die *Einheitsdyade* \mathfrak{I} , die in Komponenten bezüglich O die Form

$$\mathfrak{I}|_O = \begin{pmatrix} \mathcal{O} & \mathcal{I} \\ \mathcal{I} & \mathcal{O} \end{pmatrix}. \quad (2.20)$$

annimmt. Die *transponierte Dyade* \mathfrak{D}^T zur Dyade \mathfrak{D} lässt sich durch die Identität

$$\mathfrak{h}_1 \cdot (\mathfrak{D}^T \cdot \mathfrak{h}_2) := \mathfrak{h}_2 \cdot (\mathfrak{D} \cdot \mathfrak{h}_1)$$

definieren, wobei die angegebene Gleichung für beliebige Motoren \mathfrak{h}_1 und \mathfrak{h}_2 erfüllt sein muss. Für einen konkreten Bezugspunkt ergeben sich die Komponenten der zu

$$\mathfrak{D}|_O = \begin{pmatrix} \mathcal{D}_{11} & \mathcal{D}_{12} \\ \mathcal{D}_{21} & \mathcal{D}_{22} \end{pmatrix} \quad \text{transponierten Dyade gemäß} \quad \mathfrak{D}^T|_O = \begin{pmatrix} \mathcal{D}_{11}^T & \mathcal{D}_{21}^T \\ \mathcal{D}_{12}^T & \mathcal{D}_{22}^T \end{pmatrix}.$$

Die bereits eingeführte Notation legt nahe, anstelle der Anwendung einer Dyade auf einen Motor von der Multiplikation einer Dyade mit einem Motor zu sprechen. In dieser Denkweise lässt sich dann auch die Linksmultiplikation eines Motors mit einer Dyade über die Beziehung

$$\mathfrak{h}_1 \cdot \mathfrak{D} := \mathfrak{D}^T \cdot \mathfrak{h}_1$$

eingeführen. Ist eine Dyade gleich ihrer transponierten Dyade, so wird sie als *symmetrische Dyade* bezeichnet.

Ebenfalls in Analogie zur Vektordyade sei noch die *inverse Dyade* \mathfrak{D}^{-1} eingeführt als diejenige Dyade, die die Gleichungen

$$\mathfrak{D} \cdot \mathfrak{D}^{-1} = \mathfrak{I} \quad \text{und} \quad \mathfrak{D}^{-1} \cdot \mathfrak{D} = \mathfrak{I}$$

erfüllt. Es lässt sich zeigen, dass eine Dyade genau dann eine Inverse besitzt, wenn die Dyade den Rang $r = 6$ besitzt²¹. Alle Dyaden für die $\mathfrak{D}^{-1} = \mathfrak{D}^T$ gilt, werden als *orthogonal* bezeichnet.

Satz 2.6 Gegeben seien zwei beliebige Basen $\mathcal{H} = \{\bar{\mathfrak{h}}_1, \dots, \bar{\mathfrak{h}}_6\}$ und $\mathcal{G} = \{\bar{\mathfrak{g}}_1, \dots, \bar{\mathfrak{g}}_6\}$ von \mathcal{M} . Jede Dyade lässt sich in eindeutiger Weise durch ihre Koordinaten d_{ij} bezüglich der Basen \mathcal{H} und \mathcal{G} angeben:

$$\mathfrak{D} = \sum_{i,j=1}^6 d_{ij} \bar{\mathfrak{h}}_i \otimes \bar{\mathfrak{g}}_j. \quad (2.21)$$

Beweis: Entsprechend Anhang A.1.4 kann jede Dyade durch eine Linearkombination dyadischer Produkte ausgedrückt werden:

$$\mathfrak{D} = \sum_{i=1}^6 \mathfrak{h}_i \otimes \mathfrak{g}_i.$$

²¹Zur Definition des Rangs einer Dyade vergleiche Anhang A.1.4.

Werden dabei die Motoren \mathfrak{h}_k entsprechend $\mathfrak{h}_i = \bar{\mathfrak{h}}_i$ für $i = 1, \dots, 6$ vorab festgelegt, so ist die Darstellung eindeutig. Schließlich müssen nur noch die Motoren \mathfrak{g}_k in obiger Gleichung bezüglich der Basis \mathcal{G} angegeben werden, um die Koordinaten d_{ij} zu erhalten. Da die Koordinaten eines Motors bezüglich einer gegebenen Basis eindeutig festgelegt sind, sind es die Koordinaten d_{ij} der Dyade ebenfalls. \square

Bemerkung. Mithilfe des skalaren Produktes lassen sich die Koeffizienten d_{ij} direkt über die Lösung eines linearen Gleichungssystems berechnen. Hierzu multipliziere man Gleichung (2.21) von links mit jedem der Motoren $\bar{\mathfrak{h}}_\nu$ aus \mathcal{H} und von rechts mit jedem der Motoren $\bar{\mathfrak{g}}_\mu$ aus \mathcal{G} durch. Das entstehende Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} \bar{\mathfrak{h}}_1 \cdot \mathcal{D} \cdot \bar{\mathfrak{g}}_1 & \cdots & \bar{\mathfrak{h}}_1 \cdot \mathcal{D} \cdot \bar{\mathfrak{g}}_6 \\ \vdots & & \vdots \\ \bar{\mathfrak{h}}_6 \cdot \mathcal{D} \cdot \bar{\mathfrak{g}}_1 & \cdots & \bar{\mathfrak{h}}_6 \cdot \mathcal{D} \cdot \bar{\mathfrak{g}}_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\mathfrak{h}}_1 \cdot \bar{\mathfrak{h}}_1 & \cdots & \bar{\mathfrak{h}}_1 \cdot \bar{\mathfrak{h}}_6 \\ \vdots & & \vdots \\ \bar{\mathfrak{h}}_6 \cdot \bar{\mathfrak{h}}_1 & \cdots & \bar{\mathfrak{h}}_6 \cdot \bar{\mathfrak{h}}_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_{11} & \cdots & d_{16} \\ \vdots & & \vdots \\ d_{61} & \cdots & d_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\mathfrak{g}}_1 \cdot \bar{\mathfrak{g}}_1 & \cdots & \bar{\mathfrak{g}}_1 \cdot \bar{\mathfrak{g}}_6 \\ \vdots & & \vdots \\ \bar{\mathfrak{g}}_6 \cdot \bar{\mathfrak{g}}_1 & \cdots & \bar{\mathfrak{g}}_6 \cdot \bar{\mathfrak{g}}_6 \end{pmatrix}$$

besitzt dann eine eindeutige Lösung für die gesuchten Koordinaten d_{ij} .

Die Angabe zweier Basen (beispielsweise links und rechts der Dyade) für die Angabe der Koordinaten einer Dyade würde die von den Motoren bekannte Notation völlig überfrachten²². In der vorliegenden Arbeit wird daher darauf verzichtet, zwei unterschiedliche Basen für die Darstellung einer Dyade zu nutzen. Falls nicht anders vermerkt, werden im Folgenden gleiche Basen ($\mathcal{H} = \mathcal{G}$) für die Koordinatendarstellung der Dyaden genutzt. Symbolisiert wird die genutzte Basis, in Analogie zu den Motoren, durch einen senkrechten Strich oder eine eckige Klammer mit der zugehörigen Basis als Index. Beim praktischen Rechnen mit Motoren wird man oftmals auf die Komponentendarstellung der Dyade zurückgreifen und die Koordinaten bezüglich der entsprechenden Koordinatensysteme berechnen. In dieser Arbeit werden beide Komponenten stets auf das gleiche Koordinatensystem bezogen, dessen Ursprung als Bezugspunkt dient. Anstelle der Basis wird dann das entsprechende Koordinatensystem als Index vermerkt.

Um im Folgenden eine bequeme Schreibweise zu ermöglichen, sollen zusätzlich für die Koordinaten von Motoren und Motordyaden die Rechenregeln

$$\begin{aligned} [\mathfrak{h}_1 \cdot \mathfrak{h}_2]_{\mathcal{F}} &=: \mathfrak{h}_1|_{\mathcal{F}} \cdot \mathfrak{h}_2|_{\mathcal{F}} & [\mathfrak{h}_1 \times \mathfrak{h}_2]_{\mathcal{F}} &=: \mathfrak{h}_1|_{\mathcal{F}} \times \mathfrak{h}_2|_{\mathcal{F}} \\ [\mathcal{D} \cdot \mathfrak{h}]_{\mathcal{F}} &=: \mathcal{D}|_{\mathcal{F}} \cdot \mathfrak{h}|_{\mathcal{F}} & [\mathcal{D}_1 \cdot \mathcal{D}_2]_{\mathcal{F}} &=: \mathcal{D}_1|_{\mathcal{F}} \cdot \mathcal{D}_2|_{\mathcal{F}} \end{aligned}$$

erklärt werden. Verwechslungsgefahr mit Operationen der herkömmlichen Matrix- und Vektorrechnung besteht nicht, wenn (wie hier der Fall) die Matrixmultiplikation zur Abgrenzung ohne Multiplikationszeichen notiert wird.

Beispiel 2.3 (Wechsels des Bezugskordinatensystems eines Motors). Gegeben seien ein Motor \mathfrak{h} mit dem Resultantvektor \vec{g} und dem Momentvektor $\vec{h}(\vec{r})$ sowie zwei Koordinatensysteme \mathcal{F}_1 und \mathcal{F}_2 , wovon das erste seinen Ursprung in P besitzt und mit beliebigen (linear unabhängigen) Koordinatenachsen ausgestattet ist. Der Ursprung Q des zweiten Koordinatensystems sei um den Vektor \vec{r} gegenüber P verschoben. Die Koordinatenachsen seien zu jenen des ersten Koordinatensystems verdreht. Die Drehung einer jeden Achse werde durch den Drehoperator \mathcal{R} angegeben. Dann lässt sich zunächst der Wechsel des Bezugspunktes für die Komponenten des Motors durch die Beziehung

$$\mathfrak{h}|_Q = \begin{pmatrix} \vec{g} \\ \vec{h}(Q) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{g} \\ \vec{h}(P) + \vec{g} \times \vec{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{O} & \mathcal{I} \\ \mathcal{I} & -\tilde{\vec{r}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{g} \\ \vec{h}(P) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{O} & \mathcal{I} \\ \mathcal{I} & -\tilde{\vec{r}} \end{pmatrix} \cdot \mathfrak{h}|_P$$

²²Vergleiche hierzu die Bemerkung zu Beispiel 2.3 auf Seite 30.

angeben. Der Wechsel der Bezugskordinatensysteme erfolgt mithilfe der Drehdyade \mathcal{R} entsprechend:

$$\mathfrak{h}|_{\mathcal{F}_2} = \left(\begin{array}{c} \vec{g} \\ \vec{h}(Q) \end{array} \right) \Big|_{\mathcal{F}_2} = \left[\left(\begin{array}{cc} \mathcal{O} & \mathcal{R}^T \\ \mathcal{R}^T & \mathcal{O} \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{cc} \mathcal{O} & \mathcal{I} \\ \mathcal{I} & -\vec{r} \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{c} \vec{g} \\ \vec{h}(P) \end{array} \right) \right]_{\mathcal{F}_1} = \left[\left(\begin{array}{cc} \mathcal{O} & \mathcal{R}^T \\ \mathcal{R}^T & \mathcal{R}^T \cdot \vec{r}^T \end{array} \right) \cdot \mathfrak{h} \right]_{\mathcal{F}_1}.$$

Dabei wurde Gleichung (A.2) genutzt. Die angegebene Beziehung bildet die Koordinaten eines Motors auf die Koordinaten eines neuen Motors ab und kann daher als Koordinatendarstellung einer Motordyade gedeutet werden. Ein Zusammenhang zu der aus Beispiel 2.2 bekannten Dyade \mathfrak{T} wird leichter ersichtlich, wenn der Vektor \vec{r} bezüglich \mathcal{F}_2 angegeben wird. Mit $\vec{r}^T|_{\mathcal{F}_2} = [\mathcal{R}^T \cdot \vec{r}^T \cdot \mathcal{R}]_{\mathcal{F}_1}$ und $\mathcal{R} \cdot \mathcal{R}^T = \mathcal{I}$ folgt eine Koordinatendarstellung der Transformationsdyade bezüglich \mathcal{F}_2

$$\mathfrak{h}|_{\mathcal{F}_2} = \left(\begin{array}{c} \vec{g} \\ \vec{h}(Q) \end{array} \right) \Big|_{\mathcal{F}_2} = \left(\begin{array}{cc} \mathcal{O} & \mathcal{R}^T \\ \mathcal{R}^T & \vec{r}^T \cdot \mathcal{R}^T \end{array} \right) \Big|_{\mathcal{F}_2} \cdot \mathfrak{h}|_{\mathcal{F}_1} = \mathfrak{T}|_{\mathcal{F}_2} \cdot \mathfrak{h}|_{\mathcal{F}_1} = [\mathfrak{T}^T \cdot \mathfrak{h}]_{\mathcal{F}_1}.$$

Offenbar besitzt die Transformationsdyade \mathfrak{T} , wie auch die Drehdyade \mathcal{R} , in den Koordinatensystemen \mathcal{F}_1 und \mathcal{F}_2 die gleichen Koordinaten. Man überzeugt sich außerdem leicht davon, dass es sich bei der Dyade \mathfrak{T} um eine orthogonale Dyade handelt, wodurch sich die Umkehrung obiger Gleichung kompakt notieren lässt: $\mathfrak{h}|_{\mathcal{F}_1} = [\mathfrak{T} \cdot \mathfrak{h}]_{\mathcal{F}_2}$. \diamond

Beispiel 2.4 (Wechsel des Bezugskordinatensystems einer Motordyade). Ein Wechsel des Bezugskordinatensystems lässt sich ebenfalls für eine allgemeine Motordyade herleiten. Ausgangspunkt der Betrachtung bildet das dyadische Produkt zweier Motoren. Durch Anwendung der Ergebnisse des vorherigen Beispiels auf jeden der dyadischen Faktoren ergibt sich eine Beziehung zwischen den Koordinaten des dyadischen Produktes. Da sich jede Dyade als Summe dyadischer Produkte darstellen lässt, kann das Resultat direkt für allgemeine Dyaden übernommen werden. Unter den gleichen Voraussetzungen wie in Beispiel 2.3 ergeben sich die sehr einprägsamen Gleichungen:

$$\mathfrak{D}|_{\mathcal{F}_2} = [\mathfrak{T}^T \cdot \mathfrak{D} \cdot \mathfrak{T}]_{\mathcal{F}_1} \quad \text{und} \quad \mathfrak{D}|_{\mathcal{F}_1} = [\mathfrak{T} \cdot \mathfrak{D} \cdot \mathfrak{T}^T]_{\mathcal{F}_2}.$$

Diese Beziehungen gleichen den aus der Vektorrechnung bekannten Regeln zur Transformation einer Dyade. \diamond

Bemerkung. Die Darstellung der Transformation des Motors \mathfrak{h} zwischen den beiden Koordinatensystemen \mathcal{F}_1 und \mathcal{F}_2 in Beispiel 2.3 durch eine Motordyade ist nicht eindeutig. Es wurde jedoch eine Dyade gewählt, deren Koeffizientenmatrix bezüglich einer einzigen Basis die notwendige Transformation der Koordinaten des Motors liefert. Würde man auf diese Einschränkung verzichten, so würde beispielsweise auch die Einheitsdyade \mathfrak{J} die notwendige Transformation liefern, falls sie in den beiden Koordinatensystemen \mathcal{F}_1 und \mathcal{F}_2 angegeben²³ wird:

$$\mathfrak{T}|_{\mathcal{F}_1} = \mathcal{F}_1[\mathfrak{T}]_{\mathcal{F}_1} = \mathcal{F}_1[\mathfrak{J}]_{\mathcal{F}_2} = \mathcal{F}_2[\mathfrak{T}]_{\mathcal{F}_2} = \mathfrak{T}|_{\mathcal{F}_2}.$$

2.2.3.4. Motormatrizen

Unter einer *Motormatrix* verstehe man eine Matrix, deren Elemente Motoren sind. Damit sind alle aus der Welt der Zahlenmatrizen bekannten Operationen direkt auf Motormatrizen anwendbar. Bei der Multiplikation zweier Motormatrizen müssen jedoch verschiedene Arten der Multiplikation unterschieden werden. In völliger Analogie zur Multiplikation von Zahlenmatrizen sei die

²³Die nur an dieser Stelle genutzte Kennzeichnung zweier verschiedener Koordinatensysteme zur Angabe der Koordinaten einer Dyade erfolgt links und rechts der in eckigen Klammern notierten Dyade. Das linke Koordinatensystem bezieht sich dabei auf die jeweils ersten (links stehenden) Faktoren der zugehörigen dyadischen Produkte, das zweite auf die jeweils zweiten (rechts stehenden) Faktoren.

skalare und die motorische Multiplikation zweier Motormatrizen erklärt, wobei die Multiplikation der Elemente nun durch die skalare bzw. motorische Multiplikation der jeweiligen Elemente ersetzt wird. Gekennzeichnet werden diese Operationen durch das entsprechende Symbol der elementweisen Operationen. Das Ergebnis der skalaren Multiplikation zweier Motormatrizen ist eine Zahlenmatrix, während die motorische Multiplikation eine Motormatrix liefert. Zudem ist die Multiplikation einer Motormatrix mit einer Zahlenmatrix passenden Typs zulässig, die wie die Multiplikation zweier Zahlenmatrizen ohne Trennzeichen zwischen den Faktoren notiert wird und eine Motormatrix entsprechenden Typs ergibt.

Gegeben sei beispielsweise eine reelle $(n \times 1)$ -Zahlenmatrix $\mathbf{a} = (\alpha_1 \ \cdots \ \alpha_n)^T$ und eine $(1 \times n)$ -Motormatrix $\mathfrak{M} = (\mathfrak{h}_1 \ \cdots \ \mathfrak{h}_n)$. So gilt

$$\mathfrak{M}\mathbf{a} = \alpha_1\mathfrak{h}_1 + \cdots + \alpha_n\mathfrak{h}_n = (\alpha_1\mathfrak{h}_1 + \cdots + \alpha_n\mathfrak{h}_n)^T = (\mathfrak{M}\mathbf{a})^T = \mathbf{a}^T\mathfrak{M}^T$$

Exemplarisch sei hier noch die skalare Multiplikation zweier Motormatrizen angegeben:

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{h}_1 \\ \vdots \\ \mathfrak{h}_n \end{pmatrix} \cdot (\mathfrak{g}_1 \ \cdots \ \mathfrak{g}_m) = \begin{pmatrix} \mathfrak{h}_1 \cdot \mathfrak{g}_1 & \cdots & \mathfrak{h}_1 \cdot \mathfrak{g}_m \\ \vdots & & \vdots \\ \mathfrak{h}_n \cdot \mathfrak{g}_1 & \cdots & \mathfrak{h}_n \cdot \mathfrak{g}_m \end{pmatrix},$$

deren Ergebnis eine $(n \times m)$ -Zahlenmatrix darstellt.

Für die spätere Anwendung werden oftmals einzeilige motorische Matrizen eingeführt. Die Darstellung dieser Matrizen bezüglich eines Bezugspunktes sei durch die zweizeilige vektorwertige Matrix gegeben, deren Einträge spaltenweise die Komponenten des zugehörigen Motors sind (vergleiche Beispiel 2.5). Die Darstellung bezüglich einer Basis werde durch die sechszeilige Zahlenmatrix gegeben, deren Spalten die Koordinaten des zugehörigen Motors enthalten.

Satz 2.7 *Zu jeder $(1 \times n)$ -Motormatrix \mathfrak{M} mit n Elementen, von denen genau k ($0 \leq k \leq 6$) linear unabhängig sind, lässt sich eine einzeilige Motormatrix \mathfrak{N} finden, die $6 - k$ linear unabhängige Motoren enthält und die Gleichung*

$$\mathfrak{N}^T \cdot \mathfrak{M} = \mathbf{0}$$

erfüllt, wobei $\mathbf{0}$ die Nullmatrix vom Typ $(6 - k, n)$ symbolisiert.

Beweis: Da das skalare Produkt für jedes Element der Matrixgleichung unabhängig vom gewählten Bezugspunkt ist, kann der Beweis unter Vorgabe einer beliebigen Basis mit den Mitteln der bekannten linearen Algebra erfolgen. Die Motormatrix \mathfrak{M} geht dabei in die Zahlenmatrix \mathbf{M} vom Typ $(6, n)$ über, deren Rang der Anzahl linear unabhängiger Motoren in \mathfrak{M} entspricht, da sich die Definitionsgleichung für lineare Unabhängigkeit direkt auf die Koordinatendarstellung überträgt. Es wird nun angenommen, dass eine solche Matrix \mathfrak{M} existiert, deren Koordinatendarstellung die Gleichung:

$$\mathbf{N}^T \mathbf{\Gamma} \mathbf{M} = \mathbf{0}$$

erfüllt, wobei $\mathbf{\Gamma}$ die Koordinatendarstellung der Einheitsdyade \mathfrak{J} symbolisiert (siehe auch Gleichung (2.20)). Die Matrix $\mathbf{\Gamma}$ ist regulär, wodurch $\mathbf{\Gamma} \mathbf{M}$ den gleichen Rang besitzt wie die Matrix \mathbf{M} . Damit existiert tatsächlich eine Matrix \mathbf{N} vom Typ $(6, 6 - k)$ mit vollem Spaltenrang, die die

obige Gleichung erfüllt. Da bei festgelegter Basis die Koordinatendarstellung eindeutig einen Motor repräsentiert, kann der Koordinatendarstellung \mathbf{N} eindeutig die Motormatrix \mathfrak{M} zugeordnet werden, deren Motoren dann linear unabhängig sind. \square

Mit diesem Ergebnis lässt sich der Vektorraum der Motoren in zwei orthogonale Teilräume zerlegen, deren Durchschnitt die Nullmenge $\{\mathbf{o}\}$ bildet. Der erste Raum wird durch alle in \mathfrak{M} enthaltenen Motoren aufgespannt, der zweite durch alle in \mathfrak{N} enthaltenen Motoren. Letzterer soll in dieser Arbeit *Nullraum* zur Abbildung $\mathfrak{h} \mapsto \mathfrak{h} \cdot \mathfrak{M}$ für beliebige Motoren $\mathfrak{h} \in \mathcal{M}$ oder kurz Nullraum zu \mathfrak{M} genannt werden.

2.2.3.5. Differentiation von Motoren bezüglich reellwertiger Parameter

Gegeben sei eine Funktion \mathfrak{h} , die einen reellwertigen Parameter $\lambda \in \mathbb{R}$ auf einen Motor $\mathfrak{h}(\lambda)$ abbildet. Um nun zu dem Begriff der Ableitung dieser motorwertigen Funktion zu gelangen, gehe man von der Definition (2.15a) des Motors als Vektorfeld über dem Anschauungsraum aus und führe die Differentiation punktweise auf dem nunmehr vom Parameter λ abhängigen Vektorfeld durch. Als Bezugspunkt diene zunächst ein gegenüber einem Betrachter nicht veränderlicher Punkt O . Einem jeden anderen Punkt P sei jedoch eine Abhängigkeit vom Parameter λ gestattet. Für die Ableitung des Vektorfeldes ergibt sich dann

$$\frac{d}{d\lambda} \vec{h}(\vec{r}_P) = \frac{d\vec{h}_o}{d\lambda} + \frac{d\vec{g}}{d\lambda} \times \vec{r}_P + \vec{g} \times \frac{d\vec{r}_P}{d\lambda}.$$

Da der Punkt P beliebig war, erfüllt jeder andere Punkt Q mit dem Ortsvektor \vec{r}_Q ebenfalls obige Gleichung. Die Differenz der so entstandenen Gleichungen lässt sich dann auf die Form

$$\underbrace{\frac{d}{d\lambda} \vec{h}(\vec{r}_P) + \frac{d\vec{r}_P}{d\lambda} \times \vec{g}}_{\text{Momentenvektor bei } P} = \underbrace{\frac{d}{d\lambda} \vec{h}(\vec{r}_Q) + \frac{d\vec{r}_Q}{d\lambda} \times \vec{g}}_{\text{Momentenvektor bei } Q} + \underbrace{\frac{d\vec{g}}{d\lambda}}_{\text{Resultantvektor}} \times \underbrace{(\vec{r}_P - \vec{r}_Q)}_{\text{Ortsvektor zwischen } Q \text{ und } P}$$

eines Motors bringen, dessen Komponenten bezüglich eines beliebigen Punktes P durch

$$\left. \frac{d\mathfrak{h}}{d\lambda} \right|_P = \begin{pmatrix} \frac{d\vec{g}}{d\lambda} \\ \frac{d\vec{h}(\vec{r}_P)}{d\lambda} + \frac{d\vec{r}_P}{d\lambda} \times \vec{g} \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

gegeben sind. Dieser Motor sei zukünftig Ableitung von \mathfrak{h} bezüglich λ genannt und mit dem Symbol $\frac{d\mathfrak{h}}{d\lambda}$ gekennzeichnet.

Für einen gegenüber dem Betrachter festen Bezugspunkt P lässt sich die *Ableitung* folglich komponentenweise berechnen:

$$\left. \frac{d\mathfrak{h}}{d\lambda} \right|_P = \begin{pmatrix} \frac{d\vec{g}}{d\lambda} \\ \frac{d\vec{h}(\vec{r}_P)}{d\lambda} \end{pmatrix} = \frac{d}{d\lambda} (\mathfrak{h}|_P)$$

und liefert entsprechend der Definition des Motors die punktweise Ableitung des zugehörigen Vektorfeldes:

$$\frac{d\vec{h}}{d\lambda}(\vec{r}_P) = \frac{d\vec{h}_o}{d\lambda} + \frac{d\vec{g}}{d\lambda} \times \vec{r}_P.$$

Die Ableitung beschreibt demnach die Änderung des Vektorfeldes für einen gegenüber einem Betrachter festen Bezugspunkt.

Untersucht wird nun ein zweiter Betrachter, der fest mit einem Koordinatensystem \mathcal{F}_2 verbunden ist und seine Lage stetig und differenzierbar mit dem Parameter λ gegenüber dem durch ein Koordinatensystem \mathcal{F}_1 beschriebenen ursprünglichen Betrachter ändert. Die Verschiebung des Ursprungs von \mathcal{F}_2 gegenüber dem Ursprung von \mathcal{F}_1 lasse sich dabei durch die vektorwertige Funktion $\vec{u} : \lambda \mapsto \vec{u}(\lambda)$ beschreiben. Die Verdrehung von \mathcal{F}_2 gegenüber \mathcal{F}_1 sei durch $\vec{\gamma} : \lambda \mapsto \vec{\gamma}(\lambda)$ gegeben.

Für einen gegenüber dem neuen Betrachter festen Bezugspunkt P ergibt sich wegen $\frac{d\vec{r}_P}{d\lambda} = \vec{u}$ die Ableitung zu

$$\left. \frac{d\mathfrak{h}}{d\lambda} \right|_P = \left(\begin{array}{c} \frac{d\vec{g}}{d\lambda} \\ \frac{d\vec{h}(\vec{r}_P)}{d\lambda} + \vec{u} \times \vec{g} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \frac{d'\vec{g}}{d\lambda} + \vec{\gamma} \times \vec{g} \\ \frac{d'\vec{h}(\vec{r}_P)}{d\lambda} + \vec{\gamma} \times \vec{h}(\vec{r}_P) + \vec{u} \times \vec{g} \end{array} \right).$$

wobei $\frac{d'}{d\lambda}$ die Ableitung aus der Sicht des neuen Betrachters darstellt. Der dabei genutzte Zusammenhang der Ableitungen eines Vektors bezüglich der beiden Betrachter ist aus der Vektoranalysis bekannt²⁴. Werden die Terme umsortiert, so erhält man mithilfe des motorischen Produktes die Gleichung

$$\left. \frac{d\mathfrak{h}}{d\lambda} \right|_P = \left(\begin{array}{c} \frac{d'\vec{g}}{d\lambda} \\ \frac{d'\vec{h}(\vec{r}_P)}{d\lambda} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \vec{\gamma} \\ \vec{u} \end{array} \right) \times \left(\begin{array}{c} \vec{g} \\ \vec{h}(\vec{r}_P) \end{array} \right).$$

Da der Bezugspunkt P gegenüber dem neuen Betrachter ruht, kann der erste Summand der rechten Gleichungsseite als Komponentendarstellung der Ableitung bezüglich des neuen Betrachters aufgefasst werden. Es wurde bei der Schreibweise bereits vorausgesetzt, dass der nunmehr erste Faktor des äußeren Produktes als Motor \mathfrak{u} angesehen werden kann, der die Richtung der relativen Verlagerung (Verschiebung und Verdrehung) des Koordinatensystems \mathcal{F}_2 bezüglich des Koordinatensystems \mathcal{F}_1 bei einer infinitesimal kleinen Änderung des Parameters λ beschreibt. Zusammengefasst gilt für die Ableitung aus der Sicht unterschiedlicher Betrachter

$$\frac{d\mathfrak{h}}{d\lambda} = \frac{d'\mathfrak{h}}{d\lambda} + \mathfrak{u} \times \mathfrak{h}. \quad (2.23)$$

Die eingeführte Ableitung erfüllt die bekannten Regeln der Differentiation, denn für die skalare Funktion $\alpha : \lambda \mapsto \alpha(\lambda) \in \mathbb{R}$ und die motorwertigen Funktionen $\mathfrak{h} : \lambda \mapsto \mathfrak{h}(\lambda) \in \mathcal{M}$ und $\mathfrak{g} : \lambda \mapsto \mathfrak{g}(\lambda) \in \mathcal{M}$ gelten die nachstehenden Beziehungen:

$$\begin{aligned} \frac{d(\alpha\mathfrak{h})}{d\lambda} &= \frac{d\alpha}{d\lambda}\mathfrak{h} + \alpha \frac{d\mathfrak{h}}{d\lambda}, & \frac{d(\mathfrak{h} \cdot \mathfrak{g})}{d\lambda} &= \frac{d\mathfrak{h}}{d\lambda} \cdot \mathfrak{g} + \mathfrak{h} \cdot \frac{d\mathfrak{g}}{d\lambda}, \\ \frac{d(\mathfrak{h} + \mathfrak{g})}{d\lambda} &= \frac{d\mathfrak{h}}{d\lambda} + \frac{d\mathfrak{g}}{d\lambda}, & \frac{d(\mathfrak{h} \times \mathfrak{g})}{d\lambda} &= \frac{d\mathfrak{h}}{d\lambda} \times \mathfrak{g} + \mathfrak{h} \times \frac{d\mathfrak{g}}{d\lambda}. \end{aligned}$$

Für die Differentiation bezüglich der Zeit t sei in Analogie zur Vektorrechnung für alle nachfolgenden Abschnitte folgende Konvention festgelegt: Die zeitliche Differentiation bezüglich eines

²⁴Vergleiche hierzu Gleichung (2.3) oder [Bra47].

Inertialkoordinatensystems \mathcal{J} wird durch einen Punkt über dem Motor gekennzeichnet, die zeitliche Ableitung bezüglich eines körperfesten Koordinatensystems \mathcal{B} hingegen mit einem Kreis über dem Symbol:

$$\dot{\mathfrak{h}} := \frac{d^{\mathcal{J}}\mathfrak{h}}{dt}, \quad \overset{\circ}{\mathfrak{h}} := \frac{d^{\mathcal{B}}\mathfrak{h}}{dt}.$$

Der Zusammenhang zwischen diesen beiden Ableitungen ergibt sich aus (2.23)

$$\dot{\mathfrak{h}} = \overset{\circ}{\mathfrak{h}} + \underline{\mathfrak{v}} \times \mathfrak{h}, \quad (2.24)$$

wobei der Motor $\underline{\mathfrak{v}}$ die Bewegung des Koordinatensystems \mathcal{B} gegenüber dem Inertialsystem beschreibt (vergleiche Abschnitt 2.2.4.1).

2.2.3.6. Differentiation von Motordyaden bezüglich reellwertiger Parameter

In ganz ähnlicher Weise ließe sich auch die Differentiation einer Motordyade bezüglich reellwertiger Parameter einführen. Darauf soll hier im Detail verzichtet werden. Als Ergebnis erhalte man, dass auch hier die Ableitung bezüglich eines unbewegten Bezugspunktes P komponentenweise erfolgen kann:

$$\left. \frac{d\mathfrak{D}}{d\lambda} \right|_P = \begin{pmatrix} \frac{d\mathcal{D}_{11}}{d\lambda} & \frac{d\mathcal{D}_{12}}{d\lambda} \\ \frac{d\mathcal{D}_{21}}{d\lambda} & \frac{d\mathcal{D}_{22}}{d\lambda} \end{pmatrix} = \frac{d}{d\lambda} (\mathfrak{D}|_P).$$

Betrachtet man die Änderung einer Dyade von zwei sich relativ zueinander bewegenden Koordinatensystemen aus, so gilt für die jeweilig beobachteten Ableitungen $\frac{d\mathfrak{D}}{d\lambda}$ und $\frac{d'\mathfrak{D}}{d\lambda}$:

$$\frac{d\mathfrak{D}}{d\lambda} = \frac{d'\mathfrak{D}}{d\lambda} + \tilde{\mathfrak{u}} \cdot \mathfrak{D} - \mathfrak{D} \cdot \tilde{\mathfrak{u}} =: \frac{d'\mathfrak{D}}{d\lambda} + \mathfrak{u} \times \mathfrak{D}, \quad (2.25)$$

wobei der Motor \mathfrak{u} im vorherigen Abschnitt und die Motorproduktdyade $\tilde{\mathfrak{u}}$ in Beispiel 2.1 eingeführt wurden. Das hierbei neu definierte Produkt aus einem Motor und einer Motordyade $\mathfrak{u} \times \mathfrak{D}$ ist als Kurzform von $\tilde{\mathfrak{u}} \cdot \mathfrak{D} - \mathfrak{D} \cdot \tilde{\mathfrak{u}}$ zu verstehen, um formal die gleiche Schreibweise wie bei der Ableitung eines Motors in Gleichung (2.23) zu erhalten. Für nähere Informationen wird auf den Originaltext [vM24a] von RICHARD VON MISES verwiesen. Abschließend wird noch eine Gleichung angegeben, die im Umgang mit Motordyaden sehr oft zur Anwendung kommt. Dabei wird die Änderung einer Motordyade aus Sicht zweier Koordinatensysteme betrachtet, dem Inertialsystem \mathcal{J} und dem körperfesten Koordinatensystem \mathcal{B} , die sich relativ zueinander bewegen:

$$\dot{\mathfrak{D}} = \overset{\circ}{\mathfrak{D}} + \underline{\mathfrak{v}} \times \mathfrak{D}. \quad (2.26)$$

Auch hier beschreibt der Motor $\underline{\mathfrak{v}}$ die Bewegung des Koordinatensystems \mathcal{B} gegenüber dem Inertialsystem (vergleiche Abschnitt 2.2.4.1).

2.2.3.7. Differentiation bezüglich mehrerer reellwertiger Veränderlicher

Die Differentiation einer motorwertigen Funktion $\mathfrak{h}(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ bezüglich mehrerer reellwertiger Parameter, zusammengefasst in der Matrix $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1 \ \dots \ \lambda_m)^T$ des Typs $(m, 1)$, wird in völliger

Analogie zur Differentiation reellwertiger Funktionen erklärt, als die $(1 \times m)$ -Motormatrixfunktion

$$\frac{\partial \mathfrak{h}}{\partial \boldsymbol{\lambda}} := \left(\frac{\partial \mathfrak{h}}{\partial \lambda_1} \quad \cdots \quad \frac{\partial \mathfrak{h}}{\partial \lambda_m} \right),$$

die auch als *Gradient* der Funktion \mathfrak{h} bezeichnet wird. Ist andererseits eine Funktion gegeben, die einen oder mehrere reellwertige Parameter λ_i auf eine Motormatrix abbildet, so wird die (partielle) Differentiation dieser Funktion bezüglich der Parameter λ_i elementweise durchgeführt. Damit gilt beispielsweise für die Motormatrixfunktion $\mathfrak{h} = (\mathfrak{h}_1 \quad \cdots \quad \mathfrak{h}_n)^\top$ vom Typ $(n, 1)$:

$$\frac{\partial \mathfrak{h}}{\partial \boldsymbol{\lambda}} := \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathfrak{h}_1}{\partial \lambda_1} & \cdots & \frac{\partial \mathfrak{h}_1}{\partial \lambda_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \mathfrak{h}_n}{\partial \lambda_1} & \cdots & \frac{\partial \mathfrak{h}_n}{\partial \lambda_m} \end{pmatrix}.$$

Die entstandene Funktion wird *JACOBI-Matrix* genannt.

2.2.4. Anwendung der Motorrechnung

Die Einführung der Motorrechnung kann erst durch die bequeme Anwendbarkeit auf mechanische Starrkörperprobleme im dreidimensionalen Raum gerechtfertigt werden. Die Bewegungsgleichungen des ungebundenen Starrkörpers lassen sich wesentlich eleganter beschreiben, wenn man auf das oben eingeführte Konzept der Motorrechnung nach RICHARD VON MISES zurückgreift [vM24b]. Hierzu müssen Motoren definiert werden, die in der Lage sind, den Bewegungsablauf und die angreifenden Kräfte und Drehkräfte in physikalisch sinnvoller Art und Weise zu beschreiben.

2.2.4.1. Der Bewegungsmotor

Bei Festlegung auf einen beliebigen körperfesten Bezugspunkt O kann die Bewegung eines Starrkörpers, wie bereits zu Beginn des Kapitels geschildert, vollständig durch die zwei Vektoren $\dot{\vec{r}}_o$ und $\vec{\omega}$ charakterisiert werden. Der Vektor $\dot{\vec{r}}_o$ symbolisiert die translatorische Geschwindigkeit des Bezugspunktes, $\vec{\omega}$ den Drehvektor, der die Drehung des Körpers beschreibt. Den Geschwindigkeitsvektor jedes anderen Punktes erhält man durch

$$\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}_o + \vec{\omega} \times \vec{r}.$$

Es handelt sich demnach um einen Motor, der im Folgenden *Geschwindigkeits-* bzw. *Bewegungsmotor* genannt werden soll. Seine Komponenten sind der Geschwindigkeitsvektor des mitbewegten Bezugspunktes $\dot{\vec{r}}_o = \dot{\vec{r}}_o$ als Momentenvektor und der Drehvektor $\vec{\omega}$, mit dem sich der Starrkörper gegenüber dem Bezugskoordinatensystem dreht, als Resultantvektor:

$$\mathfrak{v}|_O = \begin{pmatrix} \vec{\omega} \\ \dot{\vec{r}}_o \end{pmatrix}.$$

Die Motorachse ist dabei diejenige momentane Gerade, um die der Starrkörper eine schraubenförmige Bewegung ausführt und deren Punkte, die geringste translatorische Geschwindigkeit besitzen

2.2.4.3. Der Impulsmotor und die Trägheitsdyade eines Starrkörpers

Eine weitere Größe, die sich als Motor darstellen lässt, ist der *Impulsmotor*. Seine Koordinaten besitzen unter Umständen den Charakter von Erhaltungsgrößen. Aufgebaut wird der Impulsmotor \mathfrak{p} komponentenweise durch den Impulsvektor \vec{p} und den Drehimpulsvektor \vec{l}_o bezogen auf den Punkt O

$$\mathfrak{p}|_O = \begin{pmatrix} \vec{p} \\ \vec{l}_o \end{pmatrix}.$$

Der Impulsmotor, der dem Körper zugeordnet wird, ist dabei abhängig vom gewählten Bezugspunkt. Zwischen dem Drehimpuls bezogen auf O und dem Drehimpuls bezogen auf jeden anderen Punkt P mit dem Ortsvektor \vec{r} , gilt in der Tat²⁵ die Beziehung

$$\vec{l}(\vec{r}) = \vec{l}_o + \vec{p} \times \vec{r},$$

wodurch sich auch diese Größe als Motor beschreiben lässt.

Um den Zusammenhang zwischen dem Bewegungsmotor und dem Impulsmotor des Starrkörpers darzustellen, werden die Gleichungen (2.7) und (2.8) wieder aufgegriffen:

$$\vec{p} = m\dot{\vec{r}}_o - m\vec{r}_s \times \underline{\vec{\omega}} \qquad \vec{l}_o = m\vec{r}_s \times \dot{\vec{r}}_o + \mathcal{M}_o \underline{\vec{\omega}}.$$

Beide Gleichungen lassen sich unter Einführung der Kreuzprodukt dyade $\tilde{\vec{r}}_s$ des Vektors \vec{r}_s zusammenfassen zu der gesuchten Beziehung zwischen dem Bewegungsmotor \mathfrak{v} und dem Impulsmotor \mathfrak{p} :

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{M} \cdot \mathfrak{v} \qquad \text{mit} \qquad \mathfrak{M}|_O = \begin{pmatrix} m\mathcal{I} & -m\tilde{\vec{r}}_s \\ m\tilde{\vec{r}}_s & \mathcal{M}_o \end{pmatrix}. \qquad (2.28)$$

Die neu eingeführte Dyade \mathfrak{M} kann als Trägheitsdyade der Motorrechnung aufgefasst werden. Bezogen auf ein konkretes Koordinatensystem in den Koordinaten u , v und w lautet die Koordinatenmatrix

$$\mathfrak{M}|_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 & 0 & mw_s & -mv_s \\ 0 & m & 0 & -mw_s & 0 & mu_s \\ 0 & 0 & m & mv_s & -mu_s & 0 \\ 0 & -mw_s & mv_s & M_{uu} & M_{uv} & M_{uw} \\ mw_s & 0 & -mu_s & M_{vu} & M_{vv} & M_{vw} \\ -mv_s & mu_s & 0 & M_{wu} & M_{wv} & M_{ww} \end{pmatrix},$$

wobei u_s , v_s und w_s die Koordinaten des Massenmittelpunktes bezüglich des eingeführten Koordinatensystems bezeichnen.

Wählt man speziell den Massenmittelpunkt als Bezugspunkt und die Basisvektoren des mitbewegten Koordinatensystems parallel zu den Hauptträgheitsachsen des Starrkörpers, so nimmt die Matrix $\mathfrak{M}|_{\mathcal{B}}$ Diagonalf orm an.

²⁵ Vergleiche auch Gleichung (2.9).

2.2.4.4. Die zeitliche Ableitung des Bewegungsmotors

Die Herleitung der Bewegungsgesetze des Starrkörpers erfordert, wie sich im nachstehenden Abschnitt zeigen wird, die zeitliche Ableitung des Bewegungsmotors. Entsprechend Abschnitt 2.2.3.5 ergibt die Differentiation eines Motors bezüglich eines reellwertigen Parameters stets wieder einen Motor. Dabei hängt das Ergebnis im Allgemeinen vom Beobachterkoordinatensystem ab.

Aus Sicht eines körperfesten Beobachters lässt sich nach Abschnitt 2.2.3.5 die Ableitung direkt komponentenweise bestimmen:

$$\dot{\mathbf{v}}|_O = \begin{pmatrix} \dot{\underline{\underline{\omega}}}|_O \\ \dot{\underline{\underline{v}}}_O \end{pmatrix}.$$

Aus der Sicht eines Inertialkoordinatensystems können die Ableitungen nicht direkt komponentenweise gebildet werden, da ein jeder materielle Punkt des Körpers, der als Bezugspunkt in Frage käme, bezüglich des Beobachterkoordinatensystems im Allgemeinen nicht als ruhend betrachtet werden kann. Eine Komponentendarstellung liefert allerdings Gleichung (2.22):

$$\dot{\mathbf{v}}|_O = \begin{pmatrix} \dot{\underline{\underline{\omega}}} \\ \dot{\underline{\underline{v}}}_O - \underline{\underline{\omega}} \times \underline{\underline{v}}_O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\underline{\underline{\omega}}} \\ \dot{\underline{\underline{v}}}_O \end{pmatrix}.$$

Dabei wurde berücksichtigt, dass mit $\underline{\underline{\omega}} \times \underline{\underline{\omega}} = \vec{0}$ für die Ableitungen des Winkelgeschwindigkeitsvektors $\dot{\underline{\underline{\omega}}} = \dot{\underline{\underline{\omega}}}$ gilt. Zu dem gleichen Ergebnis gelangt man mithilfe der Transformationen aus Beispiel 2.3 unter Anwendung der Produktregel:

$$\dot{\mathbf{v}}|_O = \begin{pmatrix} \mathcal{O} & \mathcal{I} \\ \mathcal{I} & -\tilde{\underline{\underline{r}}}$$

Offenbar ergibt sich das gleiche Ergebnis wie bei der Ableitung bezüglich des körperfesten Koordinatensystems. Dieses Resultat hätte man auch auf leichterem Wege erhalten können, und zwar über die Beziehung 2.23, denn unter Berücksichtigung von $\mathbf{v} \times \mathbf{v} = \mathbf{o}$ gilt

$$\dot{\mathbf{v}} = \dot{\mathbf{v}} + \mathbf{v} \times \mathbf{v} = \dot{\mathbf{v}}.$$

Es spielt demnach keine Rolle, ob die Ableitung bezüglich eines körperfesten oder eines inertialfesten Beobachters ausgeführt wird. In beiden Fällen erhält man einen Motor mit den Komponenten $\dot{\underline{\underline{\omega}}}$ und $\dot{\underline{\underline{v}}}_O$. Damit beschreibt der Motor $\dot{\mathbf{v}}$ nicht, wie zunächst vermutet werden könnte, die vollständige Beschleunigung des Starrkörpers gegenüber einem Inertialsystem (vergleiche Gleichung (2.2b)), sondern nur den Anteil daran, der sich als Motor darstellen lässt:

$$\begin{aligned} \dot{\underline{\underline{v}}} &= \dot{\underline{\underline{v}}}_O + \dot{\underline{\underline{\omega}}} \times \underline{\underline{r}} + \underline{\underline{\omega}} \times \dot{\underline{\underline{r}}} \\ \dot{\underline{\underline{v}}} &= \dot{\underline{\underline{v}}}_O + \dot{\underline{\underline{\omega}}} \times \underline{\underline{r}} + \underline{\underline{\omega}} \times (\underline{\underline{\omega}} \times \underline{\underline{r}}) + \underline{\underline{\omega}} \times \underline{\underline{v}}_O. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Die gesamte auf einen materiellen Punkt des Starrkörpers einwirkende Beschleunigung besteht demnach aus zwei Anteilen. Während die ersten beiden Summanden in (2.29) durch den Motor $\dot{\mathbf{v}}$ beschrieben werden, können die beiden übrigen Terme nicht durch einen Motor ausgedrückt werden.

2.2.4.5. Die Bewegungsgleichungen des Starrkörpers

Mit den bisher eingeführten Motoren lassen sich die Bewegungsgesetze des Starrkörpers in einfachster Weise formulieren. Die Bewegungsdifferentialgleichungen spalten sich dabei in zwei Anteile jeweils erster Ordnung auf. Während der erste Teil der Gleichungen die kinetischen Gesetzmäßigkeiten am Starrkörper widerspiegelt, beschreibt der zweite Teil die kinematischen Zusammenhänge der Bewegung.

Kinetik des Starrkörpers Die aus der Mechanik bekannten Erfahrungssätze zur Impuls- und Drehimpulserhaltung am Starrkörper können im *Impulssatz* der Motorrechnung zusammengefasst werden:

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{f}^a. \quad (2.30)$$

Er besagt, dass die zeitliche Änderung des Impulsmotors \mathbf{p} gleich dem am Starrkörper angreifenden äußeren Kraftmotor \mathbf{f}^a ist. Die abgeleitete Beziehung (2.28) zwischen Impuls- und Bewegungsmotor kann nun in diese Gleichung eingesetzt werden. Man erhält dabei die aus der Kinetik resultierende Bewegungsgleichung des Starrkörpers in bemerkenswert einfacher und einprägsamer Form²⁶

$$(\mathfrak{M} \cdot \mathbf{v})' = \mathbf{f}^a. \quad (2.31)$$

Für die bequemere Anwendung dieser Bewegungsgleichung empfiehlt es sich jedoch, die zeitliche Ableitung des Impulsmotors auf das mitbewegte Koordinatensystem zu beziehen. Unter Berücksichtigung von $\mathfrak{M} = \mathbf{o}$ ergibt sich die Bewegungsgleichung bezogen auf ein körperfestes Koordinatensystem

$$\mathfrak{M} \cdot \dot{\mathbf{v}} + \mathbf{v} \times (\mathfrak{M} \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{f}^a, \quad (2.32)$$

die strukturell eine bemerkenswerte Ähnlichkeit zur EULERSchen Kreiselgleichung aufweist.

Die kinetische Energie des Starrkörpers lässt sich ebenfalls in denkbar einfacher Form ausdrücken:

$$T = \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{p} \quad \text{mit} \quad \mathbf{p} = \mathfrak{M} \cdot \mathbf{v}.$$

Dieser Ausdruck stimmt formal mit der Gleichung der kinetischen Energie des Massenpunktes überein, wenn man die Masse m durch die Trägheitsdyade \mathfrak{M} und die Vektoren durch die entsprechenden Motoren ersetzt.

Ähnlich zu den Gleichungen der Punktmechanik ist die Leistung, die in jedem Moment von den äußeren Kräften am Starrkörper umgesetzt wird, durch die Gleichung

$$P = \mathbf{f}^a \cdot \mathbf{v} \quad (2.33)$$

gegeben. Damit lässt sich schließlich der Energiesatz für den Starrkörper in der einfachen Form

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\mathbf{v} \cdot \mathfrak{M} \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{f}^a \cdot \mathbf{v}.$$

notieren.

²⁶Werden in dieser Bewegungsgleichung alle motorischen Größen durch die entsprechenden vektoriellen Größen ausgetauscht, so erhält man direkt das zweite NEWTONSche Grundgesetz bzw. die Bewegungsgleichung des Massenpunktes.

Kinematik der Starrkörperbewegung Vervollständigt werden die kinetischen Bewegungsgleichungen (2.31) bzw. (2.32) durch die kinematischen Bewegungsgleichungen (2.14). Im Allgemeinen handelt es sich dabei um ein Algebrodifferentialgleichungssystem. Werden zur Parametrisierung der Lage des Starrkörpers n_q Koordinaten verwendet, so entstehen $n_q - 6$ algebraische Zwangsbedingungen der Form (2.14b). Die Differentialgleichungen (2.14a) lassen sich hingegen alternativ durch motorische Gleichungen in kompakter und zugleich allgemeiner Form ausdrücken. Dabei wird die Invarianz des skalaren Produktes zweier Motoren genutzt, um eine vom Bezugspunkt unabhängige Darstellung der kinematischen Differentialgleichungen zu erhalten:

$$\underline{\dot{q}}_s = \mathbf{b}_s \cdot \mathbf{v}. \quad (2.14a')$$

Die einspaltige Motormatrix \mathbf{b}_s umfasst dann genau n_q Motoren. Jede Zeile dieses Gleichungssystems beinhaltet die kinematische Differentialgleichung für jeweils eine Lagekoordinate und ist zugleich unabhängig von der Wahl eines Bezugspunktes auf dem Starrkörper.

Beispiel 2.5 (Parametrisierung durch die Position eines Bezugspunktes und die EULER-Winkel). Wird die Lage des Starrkörpers durch die Position x , y und z eines körperfesten Bezugspunktes O gegenüber einem Inertialsystem und die EULER-Winkel α , β und γ gemäß Abschnitt A.1.2 (S. 162) parametrisiert, so entsteht ein explizites Differentialgleichungssystem der Form (2.14a'). Nebenbedingungen der Gestalt (2.14b) entfallen für die kinematischen Bewegungsgleichungen. Entsprechend Abbildung A.1 lässt sich zunächst der kinematische Zusammenhang zwischen der Winkelgeschwindigkeit und den Ableitungen der EULER-Winkel notieren:

$$\vec{\omega} = \dot{\alpha}\vec{e}_z + \dot{\beta}\vec{e}'_y + \dot{\gamma}\vec{e}''_z.$$

Die Auflösung dieser Gleichung nach den Ableitungen der EULER-Winkel erfolgt zweckmäßig über die sog. *reziproke Basis*²⁷ $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, die durch folgende Gleichungen eindeutig bestimmt ist:

$$\begin{array}{lll} \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_z = 1, & \vec{e}_1 \cdot \vec{e}'_y = 0, & \vec{e}_1 \cdot \vec{e}''_z = 0, \\ \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_z = 0, & \vec{e}_2 \cdot \vec{e}'_y = 1, & \vec{e}_2 \cdot \vec{e}''_z = 0, \\ \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_z = 0, & \vec{e}_3 \cdot \vec{e}'_y = 0, & \vec{e}_3 \cdot \vec{e}''_z = 1. \end{array}$$

Mit $\mathbf{q}_s := (x \ y \ z \ \alpha \ \beta \ \gamma)^T$ können die Komponenten der Motormatrix \mathbf{b}_s nun für den gewählten Bezugspunkt O angegeben werden:

$$\mathbf{b}_s^T|_O = \begin{pmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} \\ \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \end{pmatrix}. \quad (2.34)$$

Bezogen auf das körperfeste Koordinatensystem mit dem Ursprung O und den Achsen \vec{e}_x''' , \vec{e}_y''' und \vec{e}_z''' ergeben sich die darin genutzten Vektoren zu

$$\begin{array}{ll} \vec{e}_x|_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \gamma - \sin \alpha \cos \beta \sin \gamma \\ -\cos \alpha \sin \gamma - \sin \alpha \cos \beta \cos \gamma \\ \sin \alpha \sin \beta \end{pmatrix}, & \vec{e}_1|_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \frac{\sin \gamma}{\sin \beta} \\ \cos \gamma \\ -\frac{\sin \gamma \cos \beta}{\sin \beta} \end{pmatrix}, \\ \vec{e}_y|_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \sin \alpha \cos \gamma + \cos \alpha \cos \beta \sin \gamma \\ -\sin \alpha \sin \gamma + \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma \\ -\cos \alpha \sin \beta \end{pmatrix}, & \vec{e}_2|_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \frac{\cos \gamma}{\sin \beta} \\ -\sin \gamma \\ -\frac{\cos \gamma \cos \beta}{\sin \beta} \end{pmatrix}, \\ \vec{e}_z|_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \sin \beta \sin \gamma \\ \sin \beta \cos \gamma \\ \cos \beta \end{pmatrix}, & \vec{e}_3|_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{array}$$

◇

Auf der Basis der hier vorgestellten Grundlagen werden in den nachfolgenden Abschnitten die Bewegungsgleichungen für Starrkörpersysteme abgeleitet.

²⁷Siehe hierzu beispielsweise [Bra47, Lag56]

Kapitel 3.

Beschreibung von Starrkörpersystemen mithilfe der Motorrechnung

Ein *Mehrkörpersystem* (MKS) ist ein Modell der Mechanik für eine (endliche) Anzahl von Körpern, die sich unter dem Einfluss von Kräften im Raum bewegen. Die Körper des Systems werden auch *Glieder* des MKS genannt. Sie sind untereinander durch (masselose) Gelenke verbunden, die ihre Relativbewegung zueinander durch Zwangsbedingungen einschränken. Die Wirkung aller auf das System einwirkenden Kraftfelder lässt sich nach Abschnitt 2.1.2 durch resultierende Kräfte und Drehkräfte auf die Körper beschreiben.

In der Fachliteratur werden MKS danach unterschieden, ob bei der Modellierung Verformungen der einzelnen Körper berücksichtigt werden. Dabei bezeichnet man Modelle als *starre* Mehrkörpersysteme, bei denen alle Glieder des MKS als Starrkörper modelliert werden. Alle in der Realität auftretenden elastischen oder plastischen Verformungen werden bei der Modellierung der Körper vernachlässigt. *Starre* MKS werden in dieser Arbeit *Starrkörpersysteme* (kurz SKS) genannt und stehen im Mittelpunkt dieses Kapitels. Mehrkörpersysteme, bei deren Modellierung elastische Verformungen der Körper berücksichtigt werden, finden sich in der Fachliteratur unter den Begriffen *flexible* oder *elastische Mehrkörpersysteme*. Diese Modelle werden in der vorliegenden Arbeit nicht näher betrachtet. Als weiterführende Literatur seien in diesem Zusammenhang die Lehrbücher [BP92, SW99, Sha05, Bre08] empfohlen.

In den folgenden Unterkapiteln werden die zuvor beschriebenen Werkzeuge der Motorrechnung auf Starrkörpersysteme angewandt. Das Unterkapitel 3.1 liefert daher zu Beginn einen kurzen historischen Abriss über die Wurzeln der Motorrechnung und die bisher genutzten Werkzeuge in der Mehrkörperdynamik. Dabei werden Vor- wie auch Nachteile bisheriger Darstellungsweisen gegenüber der hier genutzten Motoralgebra diskutiert. Anschließend werden in Abschnitt 3.1.1 wesentliche Begriffe zur Beschreibung der topologischen Struktur von SKS eingeführt. Die Definition problemangepasster Kraft- und Bewegungsgrößen für die Glieder des SKS erfolgt in den Abschnitten 3.1.2 und 3.1.3.

In Unterkapitel 3.2 folgt dann die Behandlung von Gelenken und deren Zwangsbedingungen mit den Mitteln der Motorrechnung. Auch hier werden zunächst in Abschnitt 3.2.1 die zur kinematischen Beschreibung der Bewegung notwendigen Zusammenhänge dargestellt. Die aus den Zwangsbedingungen resultierenden Zwangskräfte lassen sich ebenfalls mit den Mitteln der Motorrechnung charakterisieren und werden in Abschnitt 3.2.2 hergeleitet. Durch verschiedene Beispiele in der Praxis häufig anzutreffender Gelenktypen werden die angegebenen Zusammenhänge illustriert.